GROUPE, SOUS-GROUPE, ORDRE, MORPHISME, QUOTIENT, PRODUIT

Les exercices proposés ne seront pas tous traités en T. D. Ceux marqués d'une (*) sont a priori plus difficiles.

Exercice 1. Soit G un monoïde, c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi associative avec un élément neutre. Montrer que si b est un inverse à gauche de a et c un inverse à droite de a alors $b = c$. En déduire que si a possède un inverse (bilatère) alors celui-ci est unique.

Exercice 2. Dans $\mathbf{Z}$, (quelle est la loi de groupe et) quels sont les sous-groupes ? La réunion de deux sous-groupes est-elle un sous-groupe ?

Exercice 3. Montrer que tout groupe d'ordre premier p est cyclique (i.e. engendré par un élément), donc isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et abélien. Quel est le plus petit groupe non trivial qui ne soit pas cyclique ?

Exercice 4. Soit G un groupe tel que pour tout élément x de G, x^2 =l'élément neutre. Montrer que G est commutatif.

Exercice 5.

a) Soit $\sim$ la relation définie sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ par : $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et identifier $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})/\sim$.

b) Etudier de même la relation définie sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ par : $(p, q) \sim (r, s) \Leftrightarrow ps = qr$.

c) Etudier de même la relation définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $(x, y) \sim (z, t) \Leftrightarrow y = t$.

Exercice 6. Dans un groupe (non nécessairement fini), montrer que tout sous-groupe d'indice 2 (c'est-à-dire tel que l'*ensemble* quotient ne contienne que deux classes) est distingué.

Exercice 7.

a) Dans le groupe G des bijections du plan euclidien dans lui-même (muni de quelle loi ?), montrer que le sous-ensemble H des isométries (c'est-à-dire des applications qui préservent la distance) forme un sous-groupe.

b) Dans ce groupe H, montrer que le sous-ensemble D_n des isométries qui conservent (globalement) l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés forme un sous-groupe. (Pour $n \geq 3$, on l'appelle le "groupe diédral d'ordre $2n$").

Exercice 8. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G, et K un sous-groupe de H. Montrer que K est un sous-groupe de G. Si H est distingué dans G et K distingué dans H, K est-il distingué dans G ? (On pourra s'intéresser au groupe diédral D_8.)

Exercice 9. Dans un groupe G, soient x d'ordre m et y d'ordre n.

a) Si $xy = yx$, montrer que l'ordre de xy divise $\mathrm{ppcm}(m, n)$. Peut-on remplacer "divise" par "=" ?

b) Déduire de (a) que les éléments d'ordre fini d'un groupe commutatif G forment un sous-groupe de G.

c) Si $xy = yx$ et $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$, montrer que l'ordre de xy vaut mn.

d) Pouvait-on se passer de l'hypothèse $xy = yx$ dans (a), et de l'hypothèse G commutatif dans (b) ? (regarder $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$).

Exercice 10. Montrer qu'il existe $a, b \in (\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}), +)$ tels que a, b soient d'ordre infini et $a+b$ d'ordre fini > 1.

Exercice 11. Soit $f : G \to H$ un morphisme entre deux groupes finis G et H de même ordre. Montrer que si $\mathrm{Ker}(f)$ est réduit au neutre alors f est un isomorphisme.

Exercice 12. (*) Soient G un groupe et $(Aut(G), \circ)$ le groupe de ses automorphismes. Pour tout $u \in G$ on note Ad_u l'automorphisme intérieur de G associé à u, défini par $Ad_u(g) = ugu^{-1}$.

a) Vérifier que $u \mapsto Ad_u$ est un morphisme de G dans $Aut(G)$.

b) En déduire que le sous-ensemble $Int(G)$ de $Aut(G)$ constitué des automorphismes intérieurs (c'est-à-dire de tous les automorphismes de la forme Ad_u avec $u \in G$) est un sous-groupe.

c) Prouver que ce sous-groupe est distingué.

d) Démontrer que ce groupe $Int(G)$ est isomorphe à un quotient de G par un sous-groupe distingué $Z(G)$ (que l'on précisera).

e) Prouver que $Z(G)$ est non seulement distingué dans G (i.e. stable par tout automorphisme intérieur) mais caractéristique (i.e. stable par tout automorphisme).

Exercice 13. (*) Soient H, K deux sous-groupes d'un groupe G. On note HK l'image de l'application $H \times K \to G, (h, k) \mapsto hk$. Montrer que

a) HK est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$;

b) si K est stable par conjugaison par tout élément de H alors $HK = KH$, mais la réciproque est fausse ;

c) si $\forall h \in H, \forall k \in K, hk = kh$ alors K est stable par conjugaison par tout élément de H, mais la réciproque est fausse ;

d) si $\forall h \in H, \forall k \in K, hk = kh$ alors le sous-groupe HK est isomorphe au quotient du groupe produit $H \times K$ par un certain sous-groupe distingué (à déterminer) ;

e) si K est distingué dans G alors HK est un sous-groupe de G, K est distingué dans HK, $K \cap H$ est distingué dans H, et les deux groupes quotients associés sont isomorphes.