Université Le Mirail **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique (MI003AX) **24 juin 2013**

Examen 2ème session

Ce sujet comporte 6 exercices[1]. Les documents et appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas acceptés. Une attention toute particulière sera accordée à la qualité de la rédaction, toute affirmation devra être argumentée.

Durée de l'épreuve : 2h.

Exercice 1

On considère les assertions suivantes :

$$\begin{aligned} &(P) : \ \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2; \\ &(Q) : \ \exists n \in \mathbb{N}, \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}; \\ &(R) : \ \forall k \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}, 2q = k. \end{aligned}$$

1. Écrire les négations de (P), (Q) et (R).
2. En justifiant vos réponses, dire si (P), (Q) et (R) sont vraies ou fausses.

Exercice 2

Soit E un ensemble, considérons deux parties A et B de E. Montrer que :

1. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.
2. $A \cup ((E \setminus A) \cap B) = A \cup B$.
3. $\mathrm{Card}\,(\mathcal{P}((E \setminus A) \cap A)) = 1$.

Exercice 3

À l'aide du binôme de Newton, montrer les assertions suivantes

1. pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.
2. pour tout $n \geqslant 1$: $\sum\limits_{k=0}^{2n} (-2)^k C_{2n}^k = 1$.

Exercice 4

Considérons les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x}{1-x} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

1. f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ? Calculer les inverses f^{-1} et g^{-1} lorsqu'elles existent.
2. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

1. N'oubliez pas de tourner la page !

Exercice 5

Montrer par récurrence que :

$$\forall\, n \geqslant 2,\ 2^n \geqslant n+2.$$

Exercice 6

Reprenons la fonction f de l'Exercice 4.

1. Montrer que $f(x) = 1 + \frac{2x}{1-x}$.
2. Déterminer majorants, minorants, sup, inf, max et min (lorsque ils existent) de $f(I)$, pour :
   (a) $I = [0, 1[$;
   (b) $I =]1, +\infty[$;
   (c) $I =]-\infty, 1[$;
   (d) $I = [-2, -1[$.