Examen 2$^{\text{ème}}$ session

Exercice

1. $G = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

2. (a) $\varphi(k_1 + k_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k_1+k_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k_2} = \varphi(k_1)\varphi(k_2).$

   (b) Par définition d'un groupe engendré par un élément, pour toute matrice $M \in G$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(k) = M$. Ainsi, φ est surjectif.

   (c) $\ker \varphi$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ donc il est de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n = \min \left\{ k \geqslant 0 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = I_2 \right\}.$

   Par la question 1., $n = 4$.

   (d) Soient H, K deux groupes et $f : H \to K$ un morphisme de groupes surjectif. Le théorème d'isomorphisme nous dit que :
   $$H/\ker f \simeq K.$$
   On en conclut donc que $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

3. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ représente la rotation de centre $(0,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Les autres matrices sont les rotations de centre $(0,0)$ et d'angles respectifs π, $\frac{3\pi}{2}$ et 0. Ainsi G représente le groupe des rotations d'un carré.

Problème

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire euclidien usuel et de sa base canonique. Soit $\mathcal{C}$ la conique définie par le polynôme de degré 2 :
$$F(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 4.$$

Partie I : étude de la nature de $\mathcal{C}$

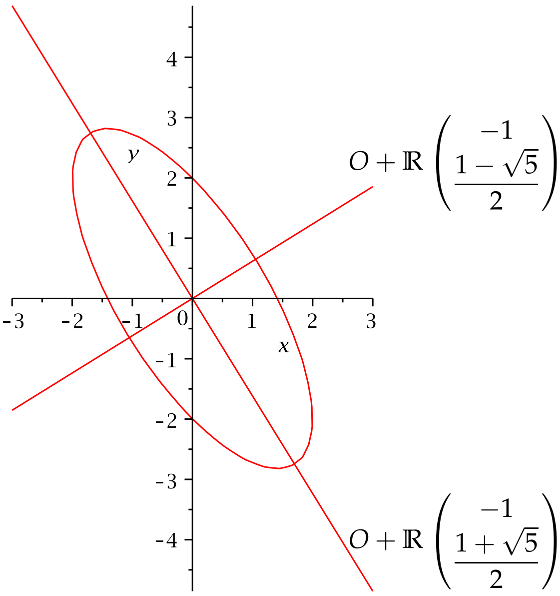
1. $q((x, y)) = 2x^2 + y^2 + 2xy$.
2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\det(M) = 1$ donc la matrice possède un unique centre O. On remarque que F ne possède pas de partie linéaire, ainsi le point O a pour coordonnées, dans la base canonique, $(0,0)$.
4. On remarque ${}^tM = M$, c'es-à-dire que M est symétrique. Mais ${}^tMM = M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, donc $M \notin O_2(\mathbb{R})$.
5. La matrice M est symétrique, d'après le cours, elle est diagonalisable.
6. Le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 3X + 1$. Les valeurs propres de M sont donc $\lambda_1 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.
   Calculons $E(\lambda_1) = \ker(f - \lambda_1 id_{\mathbb{R}^2})$:
   $$(x, y) \in E(\lambda_1) \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x + y = 0.$$

Ainsi, $E(\lambda_1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.
Calculons $E(\lambda_2) = \ker(f - \lambda_2 id_{\mathbb{R}^2})$:

$$(x, y) \in E(\lambda_2) \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + y = 0.$$

Ainsi, $E(\lambda_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$. De plus les vecteurs $\left(-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\left(-1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ sont orthogonaux et forment une base, c'est donc la base orthogonale cherchée. Dans cette base, la matrice M s'écrit : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

7. M possède deux valeurs propres positives. La signature de q est donc $(2, 0)$. D'après le cours, la conique $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou le vide.
   Or la constante est strictement négative, on en conclut que $\mathcal{C}$ est une ellipse.
   Enfin les axes de symétries sont les droites $O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$ et $O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.



Partie II : étude du groupe des isométries conservant $\mathcal{C}$

1. ${}^tSS = I_2$, donc $S \in O_2(\mathbb{R}^2)$. De plus $\det(S) = -1$ donc S représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite $E(1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.
2. ${}^tR = R$ et ${}^tRR = R^2 = I_2$, donc $R \in O_2(\mathbb{R})$. De plus, $\det(R) = 1$ donc R représente une rotation d'angle π vu qu'elle est de carré égal à l'identité et son centre est O car elle est vectorielle.
3. $id_{\mathbb{R}^2} \in Is(\mathcal{C})$. De plus si $f, g \in Is(\mathcal{C})$ alors $fg^{-1}(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ car :
   $$g(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C} = g^{-1}(\mathcal{C}).$$
   Ainsi $fg^{-1} \in Is(\mathcal{C})$ et donc $Is(\mathcal{C})$ est un sous-groupe de $Is(\mathbb{R}^2)$.
4. $S^2 = R^2 = I_2$ car ce sont des symétries. $RS = -I_2S = -S = S(-I_2) = SR$.
   $F\left(S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 5F(x, y) = 0$. Donc $s \in Is(\mathcal{C})$.
   $F\left(R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = F(x, y) = 0$. Donc $r \in Is(\mathcal{C})$.

5. (a) $f\circ r\circ f^{-1}$ est une isométrie car c'est une composée d'isométries. De plus :

$$\det(\overrightarrow{f\circ r\circ f^{-1}}) = \det(\overrightarrow{f}\circ r\circ \overrightarrow{f^{-1}}) = \det(r) = 1.$$

$f\circ r\circ f^{-1}$ est donc une isométrie positive. Remarquons que :

$$f\circ r\circ f^{-1}(f(O)) = f\circ r(O) = f(O).$$

Ainsi, $f\circ r\circ f^{-1}$ est une rotation de centre $f(O)$. Enfin pour déterminer l'angle θ de la rotation, il faut remarquer que :

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} = 2\cos(\theta);$$

$$\operatorname{tr}(\overrightarrow{f\circ r\circ f^{-1}}) = \operatorname{tr}(\overrightarrow{f}\circ r\circ \overrightarrow{f^{-1}}) = \operatorname{tr}(r) = \operatorname{tr}(-I_2) = -2.$$

D'oú, $\cos(\theta) = -1$ et donc $\theta = \pi$.

(b) Comme $Is(\mathcal{C})$ est un groupe, alors $f^{-1}\in Is(\mathcal{C})$ et donc :

$$f\circ r\circ f^{-1}(\mathcal{C}) = f\circ r(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$

(c) D'aprés le cours, on sait que O est centre de $\mathcal{C}$ ssi l'homothétie de centre O et de rapport -1 conserve $\mathcal{C}$. Or, d'après les deux questions précédentes, $f\circ r\circ f^{-1}$ est une homothétie de centre $f(O)$ et de rapport -1 qui conserve $\mathcal{C}$, $f(O)$ est donc centre de $\mathcal{C}$. Or on a vu à la question 3. de la Partie I que O était l'unique centre de $\mathcal{C}$ donc $f(O) = O$.
Comme f est une isométrie et possède un point fixe, d'aprés le cours, on en déduit que c'est une rotation si f est une isométrie affine positive, ou une symétrie orthogonale par rapport à une droite si f est une isométrie affine négative.

(d) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\sin(\theta)\\ 2\cos(\theta)\end{pmatrix}$. Alors :

$$F\left(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta)(\sin(\theta) - 2\cos(\theta)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\theta) = 0 \text{ ou } \sin(\theta) = 2\cos(\theta).$$

On en déduit que $\theta = 0, \pi$ ou $\begin{cases}\cos(\theta) = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin(\theta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$. Or ce dernier cas est impossible (car l'image de $(0,2)$ par le carré de la matrice n'est pas un point de $\mathcal{C}$) et donc que f est soit l'identité de $\mathbb{R}^2$ soit une rotation de centre O et d'angle π, c'est-à-dire r.

(e) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\sin(\theta)\\ -2\cos(\theta)\end{pmatrix}$. Alors :

$$F\left(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right) = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta)(\sin(\theta) - 2\cos(\theta)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\theta) = 0 \text{ ou } \sin(\theta) = 2\cos(\theta).$$

On en déduit que $\theta = 0, \pi$ ou $\begin{cases}\cos(\theta) = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sin(\theta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$. Or le premier cas est impossible (car l'image du point $(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})\in\mathcal{C}$ n'est pas dans $\mathcal{C}$) donc :

$$\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix} = \pm S$$

Ainsi, $f = s$ ou $f = r\circ s$.

6. D'aprés la question 4., on a :

$$\langle r, s\rangle = \{id_{\mathbb{R}^2}, r, s, r\circ s\}.$$

D'après la question 5., $Is(\mathcal{C}) = \{id_{\mathbb{R}^2}, r, s, r\circ s\}$, donc $Is(\mathcal{C}) = \langle r, s\rangle$.

7. $Is(\mathcal{C})$ est un groupe à 4 éléments dont chaque élément, hormis le neutre, est d'ordre 2. D'après le TD2 Exercice 8, $Is(\mathcal{C})$ est isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.