Université Paul Sabatier **Toulouse**
L2 Mathématiques: groupes et géométrie **26 juin 2012**

Examen $2^{\text{ème}}$ session

Ce sujet comporte un exercice et un problème. Les documents et appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas acceptés. Une attention toute particulière sera accordée à la qualité de la rédaction, toute affirmation devra être argumentée.

Exercice

Soit G le sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{R}), .)$ engendré par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Décrire tous les éléments de G. Quel est l'ordre de G ?
2. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\to G \\ k &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \end{aligned}$$

   (a) Montrer que φ est un morphisme de groupes.
   (b) Montrer que φ est surjectif.
   (c) Montrer que $\ker \varphi = 4\mathbb{Z}$.
   (d) Enoncer le théorème d'isomorphisme et en déduire que $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
3. Géométriquement, que représente le groupe G ?

Problème

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire euclidien usuel et de sa base canonique. Soit $\mathcal{C}$ la conique définie par le polynôme de degré 2 :

$$F(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 4.$$

Partie I : étude de la nature de $\mathcal{C}$

1. Quelle est la forme quadratique associée à F ? On notera cette forme quadratique q.
2. Donner la matrice associée à q dans la base canonique, c'est-à-dire telle que :

$$q(x, y) = (x\ y)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   On notera cette matrice M.
3. La conique $\mathcal{C}$ possède-t-elle un centre ? Si oui, donner ses coordonnées dans la base canonique. On notera O le centre de la conique.
4. La matrice M est-elle orthogonale ?
5. Sans calculs, expliquer pourquoi la matrice M est diagonalisable.
6. Donner les valeurs propres de M, les espaces propres associées aux valeurs propres et une base orthogonale pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle M est diagonale.
7. Quelle est la signature de q ? quel est le type de la conique ? Quels sont ses axes de symétrie ?

Partie II : étude du groupe des isométries conservant $\mathcal{C}$

1. Considérons la matrice :
$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que S est une symétrie orthogonale. Quelle est la droite fixe ?
2. Considérons la matrice :
$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Montrer que R est une rotation de centre O et d'angle π.
3. Montrer que $Is(\mathcal{C}) = \{f \in Is(\mathbb{R}^2) \mid f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$ est un sous-groupe de $Is(\mathbb{R}^2)$ pour la composition des fonctions.
4. Soit s (resp. r) l'application linéaire représentée par S (resp. R) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $s \in Is(\mathcal{C})$, $r \in Is(\mathcal{C})$, $s^2 = id_{\mathbb{R}^2}$, $r^2 = id_{\mathbb{R}^2}$ et $r \circ s = s \circ r$.
5. Soit $f \in Is(\mathcal{C})$.
   (a) Montrer que $f \circ r \circ f^{-1}$ est une rotation de centre $f(O)$ et d'angle π, c'est-à-dire une homothétie de centre $f(0)$ et de rapport -1.
   (b) Montrer que $f \circ r \circ f^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
   (c) En déduire que $f(O) = O$ et que f est soit une rotation soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
   (d) Si $f \in Is(\mathcal{C}) \cap Is^+(\mathbb{R}^2)$ on sait que la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base canonique est de la forme :
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   Déterminer θ. (*Indication* : le point correspondant au vecteur $\overrightarrow{u} = (0, 2)$ est dans $\mathcal{C}$, le point correspondant au vecteur $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ doit donc vérifier l'équation $F(x, y) = 0$.)
   En déduire que $f = id_{\mathbb{R}^2}$ ou $f = r$.
   (e) Si $f \in Is(\mathcal{C}) \cap Is^-(\mathbb{R}^2)$ on sait que la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base canonique est de la forme :
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   et que l'axe de symétrie est dirigé par le vecteur $\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.
   Déterminer θ en suivant la même méthode que la question précédente. En déduire que $f = s$ ou $f = r \circ s$.
6. En déduire que $Is(\mathcal{C}) = \langle r, s \rangle$.
7. Montrer que $Is(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.