Université Paul Sabatier **Toulouse**
I.U.T. A, Département d'Informatique **Année 2009-2010**

TP2 BIS : MARCHES ALEATOIRES ET RUINE DU JOUEUR.

Un joueur ayant une fortune initiale de k euros désire atteindre une fortune de N euros en pariant sur une pièce de monnaie (éventuellement truquée). Il parie toujours sur pile avec une probabilité p de l'obtenir. L'objectif est d'estimer la probabilité qu'il a de se ruiner sans atteindre son but.

1. Si on note S_i la variable aléatoire représentant la somme possédée par le joueur à l'instant i, exprimer S_i en fonction de i variables de Bernouilli X_i (indépendantes identiquement distribuées de paramètre p et d'espérence 0) et de S_0 la variable aléatoire représentant la mise initiale (indépendante des X_i, $\forall i$).
2. Montrer et interpréter la propriété d'homogénéité spatiale :
$$P(S_i = j | S_0 = a) = P(S_i = j + b | S_0 = a + b)$$
3. Montrer et interpréter la propriété d'homogénéité temporelle :
$$P(S_i = j | S_0 = a) = P(S_{i+l} = j | S_l = a)$$
4. Faire une procédure qui prend comme argument N, k, p et qui renvoie sous forme d'une double liste la marche aléatoire et 0 si le joueur s'est ruiné, 1 s'il a atteint son objectif. *(Après avoir chargé les librairies stats et random, on utilisera la commande binomiald[.,.](.) pour simuler le jetté de la pièce avec une probabilité p de tomber sur la face.)*
5. On définit A_k comme étant l'évenement : *"le joueur se ruine en commençant avec une fortune k"*. A l'aide de la formule des probabilités totales, donner une formule de récurrence sur les $p_k := P(A_k)$, pour $1 < k < N - 1$.
Vérifier que la formule est aussi vraie pour $k = 1$ et $k = N - 1$.
6. Si $p = \frac{1}{2}$, montrer que :
$$p_k = 1 - \frac{k}{N}$$
Interpréter le résultat.
7. Si $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que :
$$p_k = \frac{(q/p)^k - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}$$
où $q = 1 - p$.
8. Faire une procédure qui permet d'estimer p_k pour l parties successives (on prendra l assez grand pour avoir des résultats significatifs). Comparer avec les résultats théoriques.

9. On note T_k la variable aléatoire représentant le nombre de lancés nécessaires pour que le jeu s'arrête, on admet que cette variable est *presque sûrement finie*. On pose $D_k = \mathbb{E}(T_k)$, montrer que :
$$D_k = (1 + D_{k+1})p + (1 + D_{k-1})q, \ 1 \leqslant k \leqslant N-1$$
et que
$$D_0 = D_N = 0$$
10. En déduire que, si $p = \frac{1}{2}$ alors $D_k = k(N-k)$ et si $p \neq \frac{1}{2}$ alors :
$$D_k = \frac{1}{q-p}\left(k - N\left(\frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}\right)\right)$$
11. Faire une procédure qui permet d'estimer le temps de jeu D_k pour l parties successives (on prendra l assez grand pour avoir des résultats significatifs). Comparer avec les résultats théoriques.