Probabilités et Statistiques

Ch. 2 : Notions de théorie des probabilités

1 Rappels de combinatoire.

Le but de la combinatoire est de dénombrer des objets dans un ensemble fini. Soit E_n un ensemble de n éléments (n est appelé cardinal de E_n).

1. Le nombre de manières d'ordonner (ou numéroter) les éléments de E_n est :

$$n! = 1 \times 2 \cdots \times n.$$

   Ce nombre appelé "factorielle n" croit très vite avec n. Lorsque n est grand on peut l'approximer par la formule de Stirling :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

2. Le nombre de manières de choisir p éléments **ordonnés** dans E_n **sans répétition** (on ne peut reprendre un élément déjà choisi), est :

$$\begin{aligned} A_n^p &= n(n-1)\cdots(n-p+1) \\ &= \frac{n!}{(n-p)!}. \end{aligned}$$

   La première expression est le *produit descendant de p entiers consécutifs à partir de n*. La seconde est obtenue en multipliant en haut et en bas la première expression par $(n-p)!$. Etant une fraction non simplifiée, la première expression est préférable pour les calculs numériques. Exemple : $A_{135}^4 =$

3. Le nombre de manières de choisir p éléments **non ordonnés** dans E_n **sans répétition** est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

   C'est aussi le nombre de parties à p éléments dans E_n. Exemple : $C_{135}^4 =$

4. Le nombre de manières de choisir p éléments **ordonnés** dans E_n **avec répétition** (on est autorisé à reprendre un élément déjà choisi) est

$$n^p.$$

5. Le nombre de manières de choisir p éléments **non ordonnés** dans E_n **avec répétition** est :

$$\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p.$$

   Exemple : $\Gamma_{135}^4 =$

Exercice 1. *Les situations de dénombrement ci-dessous correspondent-elles à un tirage ordonné ou non ordonné ? avec répétition ou sans répétition ? En déduire la réponse aux questions ci-dessous, d'abord sous forme symbolique puis sous forme numérique :*
- une famille de 6 personnes s'assoie sur un banc de 6 places. De combien de manières peut-elle le faire ?
- même question mais le banc contient 10 places.
- dans une course de 20 chevaux, combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?
- dans le désordre ?
- on lance deux dés indiscernables. Combien y-a-t-il de résultats possibles ?
- dans un ensemble à n éléments, combien y a-t-il de couples (x, y) d'éléments ?
- de paires $\{x, y\}$ d'éléments ?

Quelques propriétés des coefficients C_n^p :

$$i)\ C_n^0 = C_n^n = 1; \qquad ii)\ C_n^1 = n; \qquad iii)\ C_n^p = C_n^{n-p}; \qquad iv)\ C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.$$

Exercice 2. *En utilisant l'interprétation des C_n^p comme nombre de parties à p éléments dans E_n, expliquez les formules ci-dessus. (Indication pour la dernière formule : fixer un élément a de E_n et compter le nombre de parties à p éléments le contenant et celles ne le contenant pas.)*

Un exemple d'utilisation : Calculons C_{100}^{97} :

La formule iv) permet de calculer les C_n^p de proche en proche par le triangle de Pascal :

	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	$\cdots$
n=1	1	1					
n=2	1	2	1				
n=3	1	3	3	1			
n=4	1	4	6	4	1		
n=5							
$\vdots$							

Les coefficients C_n^p vérifient de plus la formule du binôme (qui se démontre par récurrence en utilisant les propriétés ci-dessus) :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \\ &= a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + b^n.\end{aligned}$$

C'est pour cette raison qu'ils sont appelés coefficients binomiaux.

> ***Exercice 3.***
> *- remplir la ligne $n = 5$ du triangle de Pascal ci-dessus.*
> *- écrire la formule du binôme pour $n = 5$: $(a + b)^5 = ?$*
> *- en déduire $(a - b)^5$.*
> *- quelle formule obtient-on si on pose dans la formule du binôme d'ordre n $a = 1$ et $b = -1$?*
> *- même question avec $a = b = 1$. Que signifie cette dernière formule en termes de parties d'un ensemble ?*

2 Théorie des probabilités : premières notions.

Un espace probabilisé est la donnée de trois objets : $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{p})$ où Ω est un ensemble de "résultats possibles" d'une expérience aléatoire, $\mathcal{T}$ un ensemble "d'évènements", et p une "loi de probabilité" sur cet ensemble. Précisons la signification de ce vocabulaire :

Expérience aléatoire (exemple : jet d'un dé). C'est une expérience dont le résultat (chiffre sorti) ne peut être calculé. C'est le contraire d'une expérience déterministe (exemple : jet d'une bille ; résultat attendu : position de l'impact). Deux exemples d'expériences aléatoires :

- exemple 1. Jet d'une paire de dés : on relève les deux résultats.

- exemple 2. On place 3 ampoules électriques sur un banc d'essai, laissées allumées jusqu'à ce qu'elles meurent. On relève leurs trois durées de vie.

On note Ω *l'ensemble des résultats possibles* d'une expérience aléatoire.

> ***Exercice 4.*** *Pour chacune des deux expériences aléatoires ci-dessus, décrire leur ensemble de résultats possibles. Est-il discret ou continu ? S'il est discret, quel est son cardinal ?*
> *Attention : pour l'exemple 1, on fera deux descriptions distinctes, notées Ω_1 et Ω'_1 selon que l'on considère que les dés sont discernables ou non.*

Evènement : c'est une partie de l'ensemble Ω des résultats possibles. On dit que l'évènement se réalise lorsque le résultat de l'expérience aléatoire tombe dans cette partie.

> ***Exercice 5.***
> *Dans l'exemple 1, lister les éléments des parties de Ω correspondant aux évènements suivants :*
> *- A : "la somme des deux dés est égale à 4" ;*
> *- B : "la somme des deux dés est strictement inférieure à 5" ;*
> *Dans l'exemple 2, décrire la partie C correspondant à l'évènement : "la durée de vie moyenne des trois ampoules est inférieure à 1000 heures" ;*

L'ensemble $\mathcal{T}$ des évènements est donc inclus dans l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω. Il est souvent, mais pas toujours égal à tout $\mathcal{P}(\Omega)$: certaines parties pourraient ne pas pouvoir être décrites par une phrase concrète. On demande seulement que :

– $\mathcal{T}$ soit stable par réunion (pouvoir prononcer "ou" dans la phrase), et par intersection ("et");
– $\mathcal{T}$ soit stable par passage au complémentaire (pouvoir parler de l'**évènement** $\overline{A}$ **contraire** de A);
– $\mathcal{T}$ contienne le vide (**évènement impossible**) et Ω (**évènement certain**).

La collection $\mathcal{T}$ des évènements, munie des lois $\cup$, $\cap$, et "complémentaire" avec ces propriétés est appelée **tribu**. C'est un exemple d'algèbre de Boole. On dit de plus que

– un évènement est **élémentaire** s'il ne contient qu'un seul élément. (C'est un singleton).

– deux évènements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 6. *Sur l'exemple 1, donner une phrase désignant :*
- un évènement élémentaire;
- un évènement impossible;
- deux évènements incompatibles;
- un évènement et son contraire.

Loi de probabilité. C'est une fonction p de $\mathcal{T}$ dans $[0,1]$ qui vérifie les deux propriétés :

i- $p(\Omega) = 1$;
ii- pour tout couple d'évènements A et B incompatibles ($A \cap B = \emptyset$),

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Des deux propriétés (i-) et (ii-), on déduit les autres propriétés :

iii- $p(\emptyset) = 0$.
iv- Pour deux évènements quelqonques, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
v- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Exercice 7. *Démontrez ces 3 dernières propriétés à partir des propriétés i) et ii) de la définition d'une loi de probabilité.*

Le but d'une telle application p est de *mesurer les chances qu'un évènement se réalise*. Il y a beaucoup de lois de probabilités sur un même ensemble d'évènements. C'est l'expérimentation statistique (on renouvelle l'expérience aléatoire un grand nombre de fois, et on note la fréquence de réalisation de l'évènement) qui permet de voir si la loi choisie colle à la réalité.

Exercice 8. *Deux évènements A et B ont pour probabilité 0,7 et 0,5.*
- sont-ils incompatibles ?
- Sachant que la probabilité de leur réunion est de 0,9, calculer $p(A \cap B)$ et $p(A \cap \overline{B})$.

3 Loi de probabilité uniforme discrète.

C'est la loi qui apparait dès que *chaque évènement élémentaire est équiprobable* (par exemple : jet d'un dé non truqué). Soit n le cardinal de Ω (= le nombre de cas possibles). Pour tout évènement élémentaire $\{x\}$ on a alors : $p(\{x\}) = 1/n$. Pour un évènement A quelconque de cardinal a (= nombres de cas favorables), on a alors nécessairement d'après la propriété d'additivité (ii-) :

$$p(A) = \frac{a}{n}.$$

Le calcul des probabilités *uniformes* se ramène à un calcul de dénombrement : on doit déterminer le nombre d'éléments de Ω et de chaque évènement A.

> ***Exercice 9.***
> *- L'exemple 1 correspond-t-il à une situation de probabilités uniformes ? (discuter suivant le choix fait pour Ω_1).*
> *- Déterminer la probabilité des évènements A et B considérés dans l'exercice 5.*
> *- quelle est la probabilité d'obtenir un tiercé dans le désordre lors d'une course de 20 chevaux ? dans l'ordre ? (utiliser le dénombrement de l'exercice 1).*

4 Probabilités conditionnelles.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ un espace probabilisé et B un évènement de probabilité non nulle. *La probabilité que l'évènement A se réalise, sachant que B est réalisé* (notée $p(A/B)$ est donnée par :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Deux évènements sont **indépendants** si et seulement si

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

En effet, on a alors $p(A/B) = p(A)$: la probabilité de réalisation de A devient indépendante de la réalisation de B.

> ***Exercice 10.*** *Lors d'un examen, 25% des étudiants échouent en mathématiques, 15% échouent en informatique et 10% échouent à la fois en mathématiques et en informatique.*
> *- Les deux évènements M : "échouer en mathématiques" et C : "échouer en informatique" sont-ils indépendants ?*
> *- Calculer la probabilité conditionnelle d'échouer en informatique sachant que l'étudiant a échoué en mathématiques.*

Formule des probabilités totales. Elle permet de calculer la probabilité d'un évènement B à partir de probabilités conditionnelles. Si la collection de parties $\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$ forme une partition de Ω, (c'est-à-dire : leur réunion est Ω et ils sont deux à deux disjoints), alors

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B/A_i)p(A_i).$$

En particulier, si la partition n'est formée que de deux parties A et $\overline{A}$, on a :

$$p(B) = p(B/A)p(A) + p(B/\overline{A})p(\overline{A}).$$

> ***Exercice 11.*** *Démontrer cette formule en utilisant la définition des probabilités conditionnelles.*

Formule de Bayes. Elle permet de calculer $p(A/B)$ connaissant $p(B/A)$ et $p(B/\overline{A})$:

$$p(A/B) = \frac{p(B/A)\ p(A)}{p(B)} = \frac{p(B/A)\ p(A)}{p(B/A)\ p(A) + p(B/\overline{A})\ p(\overline{A})}.$$

Sa preuve est immédiate puisque le numérateur est $p(A \cap B)$, et le dénominateur $p(B)$ se calcule par la formule des probabilités totales. La formule de Bayes se généralise aussi en remplaçant la partition $\{A, \overline{A}\}$ par une partition quelconque $\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$:

$$p(A_1/B) = \frac{p(B/A_1)\ p(A_1)}{\sum_{i=1}^{n} p(B/A_i)\ p(A_i)}.$$

On calcule de même $p(A_2/B), \cdots p(A_n/B)$.

Test sur le chapitre 2

1. Que mesurent les symboles A_n^p, C_n^p, Γ_n^p ?
   Calculer A_{10}^3, C_{10}^3, Γ_{10}^3.
2. Quand dit-on que deux évènements sont incompatibles ?
   Les évènements $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ le sont-ils ?
   En déduire la probabilité de A en fonction des probabilités des deux évènement précédents.
3. Quand dit-on que deux évènements sont indépendants ?
   Que vaut $p(A/B)$ lorsque A et B sont indépendants ?
4. Quand dit-on qu'une loi de probabilité est uniforme ?
   Dans cette situation, comment calcule-t-on la probabilité d'un évènement ?
5. A quoi sert la formule des probabilités totales ?
   Enoncez-là.
6. Enoncez et démontrez la formule de Bayes.

Chapitre 2 : Travaux dirigés

1. A un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions choisies parmi 10.
   - S'il est obligatoire de répondre aux trois premières questions, combien de choix lui reste-t-il ?
   - Combien de choix a-t-il s'il doit répondre au moins à quatre des cinq premières questions ?
2. Dans un conseil municipal récemment élu comportant 25 conseillers, on doit choisir un maire, un premier adjoint, un deuxième adjoint et un troisième adjoint.
   (a) Cette situation correspond-t-elle à une situation de tirage avec remise ou sans remise ? ordonnée ou non ordonnée ? (Justifiez votre réponse)
   (b) Donner le nombre de résultats possibles sous forme symbolique (avec les notations des dénombrements), puis calculer sa valeur numérique.
3. A chaque fois qu'on choisit une partie A à p éléments dans E_n, la paire $\{A, \overline{A}\}$ forme une partition de E_n à deux éléments de cardinal $n_1 = p$ et $n_2 = n - p$. Il y a donc C_n^p partitions de E_n en deux parties d'effectifs p et $n - p$. Plus généralement, le nombre de partitions de E_n en k parties de n_1, n_2,... n_k éléments est : $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.
   (a) Cinq billes rouges et deux billes blanches sont alignées. De combien de manières peut-on les arranger ?
   (b) Cinq billes rouges, deux billes blanches et trois billes bleues sont alignées. De combien de manières peut-on les arranger ?
   (c) Combien d'anagrammes peut-on faire avec le mot STATISTIQUE ?
4. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes : 4 familles (2 rouges et deux noires) comportant chacune 3 figures et 5 cartes numérotées. Les évènements A et B suivants sont-ils indépendants ?
   (a) A : la carte tirée est une dame ; B : la carte tirée est noire.
   (b) A : la carte tirée est une dame ; B : la carte tirée est une figure.

   (On justifiera soigneusement les réponses en rappelant la définition de deux évènements indépendants et en effectuant les calculs nécessaires).
5. Soit p une loi de probabilité.
   (a) Démontrer que pour tout couple d'évènements A et B on a
   $$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}).$$
   (b) En déduire que les deux évènements A et B sont indépendants pour cette loi de probabilité p si et seulement si A et $\overline{B}$ le sont.
6. 100.000 billets d'une loterie sont numérotés de 00000 à 99999. On s'intéresse à la partie A des billets comportant au moins deux chiffres égaux.
   (a) Par quelle phrase peut-on décrire la partie complémentaire de A ?
   Déterminer son cardinal.
   (b) Quelle est la probabilité de tirer un billet comportant au moins deux chiffres égaux ?

7. On jette trois dés non pipés. Calculer la probabilité :
   (a) d'avoir exactement un 6 ;
   (b) d'avoir au moins un 6 ;
   (c) d'avoir au moins deux faces identiques ;
   (d) que la somme des trois dés soit égale à 9.
8. (Une loi de Probabilité non uniforme) On truque un dé de sorte que la probabilité du résultat obtenu soit proportionnelle à sa valeur (la probabilité de sortir 2 est le double de celle de sortir 1, etc...). On lance une fois le dé.
   (a) Quelle est la probabilité de chaque évènement élémentaire ?
   (b) Soit A l'évènement "sortir un nombre pair", B : "sortir un nombre premier" et C : "sortir un nombre impair". Déterminer la probabilité de chacun d'eux.
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ou premier ?
   (d) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair et non premier ?
9. Soit A l'évènement : "une famille a des enfants des deux sexes." Soit B l'évènement : "une famille a au plus un garçon." Dans l'ensemble des familles à deux enfants, ces deux évènements sont-ils indépendants ? Même question dans l'ensemble des familles à trois enfants.
10. Dans une population donnée, 58% des individus s'intéressent à la coupe du monde de football. Parmi eux, 37% s'intéressent au tournoi de tennis de Roland-Garros. De plus, 18% des personnes non intéressées par la coupe du monde de football s'intéressent néanmoins au tournoi de tennis de Roland-Garros.
    (a) Donner des noms aux évènements concernés par cette donnée et traduire les hypothèses du texte sous forme de probabilités.
    (b) Calculer la probabilité qu'un individu s'intéresse au tournoi de Roland-Garros.
    (c) Déterminer la probabilité qu'il s'intéresse à la coupe du monde de football sachant qu'il s'intéresse au tournoi de Roland-Garros.
11. En Afrique, la population de girafes est composée de 60% de femelles et de 40% de mâles. 30% des femelles et 50% des mâles sont des girafes Masaï. Quelle est la probabilité pour qu'une girafe Masaï choisie au hasard soit une femelle ?

Travail personnel :

Une entreprise fabrique des arbres de transmission à l'aide de 3 machines, la première fournissant 40% de la production avec un taux de pièces défectueuses de 2%, la seconde 30% avec un taux de pièces défectueuses de 4%, et la troisième 30% avec un taux de pièces défectueuses de 5%. On prélève une pièce dans la production. On constate qu'elle est défectueuse.

1. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la première machine ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la troisième machine ?
3. Quelle est la probabilité qu'une pièce tirée au hasard soit défectueuse ? (*Indication :* donner des noms à chaque évènement signalé dans l'énoncé, et les utiliser pour coder toutes les hypothèses de l'énoncé.)
