S2 Analyse : examen partiel du 26 mars 2010
durée : 1 heure.

calculatrice autorisée, documents interdits

I : connaissance du cours.

1. *On admet que pour tout x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.*
   En déduire l'existence et la valeur des limites $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$, *puis* $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$ *et* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

   En divisant par $x > 0$, on obtient l'encadrement

   $$1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

   D'après le théorème d'encadrement (ou des "gendarmes"), puisque $\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x^2}{6} = 1$, on a $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Cette fonction étant paire, par symétrie par rapport à l'axe vertical on a aussi $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$. Les limites à droite et à gauche étant égales, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ existe et vaut 1.

2. *Déterminer la limite :* $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

   $$\frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \frac{\sin(x-1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1}.$$

   On a : $\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$. Le premier terme du produit a pour limite 1 quand x tend vers 1 d'après la question précédente et le résultat de composition des limites. Le second tend vers 1/2. On a donc $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

II : un problème d'évolution de population.

On évalue chaque année numérotée n le nombre d'individus u_n d'une population d'animaux, exprimée en millions d'individus. La première année, on a 300.000 individus, et donc $u_1 = 0,3$. On constate que d'une année à l'autre, la population évolue par la loi :

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f(x) = kx(1-x).$$

La constante k est un paramètre réel strictement positif qui dépend du milieu où vit la population (plus ou moins hostile ou accueillant).

1. *Démontrer que f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ (toutes les méthodes seront acceptées).*

   $f'(x) = k(1-2x)$ s'annule en $1/2$, et positive avant et négative après puisque $k > 0$. Donc elle est négative sur $[0, 1/2]$, et f est décroissante sur cet intervalle.
   On peut aussi utiliser : $f(y) - f(x) = k(y - y^2 - x + x^2) = k[(y-x) - (y-x)(y+x)] = k(y-x)(1-x-y)$. Si x et y sont tous deux inférieurs à $1/2$, $(1-x-y)$ est positif. Puisque $k > 0$, $f(y) - f(x)$ est du même signe que $y - x$, ce qui prouve que f est croissante sur $]-\infty, 1/2]$ et en particulier sur $[0, 1/2]$.

2. *Expliquer pourquoi, lorsque (u_n) est convergente, sa limite l vérifie $f(l) = l$.*

   Dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, le membre de gauche tend vers l car (u_{n+1}) n'est qu'un décalage de la suite (u_n), et le membre de droite tend vers $f(l)$ car f est continue. On a donc $f(l) = l$ par unicité de la limite d'une suite.

   Résoudre cette équation et donner les deux valeurs possibles pour l.

$$\begin{aligned} f(l) = l &\Leftrightarrow kl - kl^2 = l \\ &\Leftrightarrow l(k - kl - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } k - kl - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = \frac{k-1}{k}. \end{aligned}$$

3. *Dans toute cette question, on fixe $k = 1$.*

   (a) *Calculez u_2, u_3, et comparez u_1, u_2 et u_3.*

   $u_2 = u_1(1-u_1) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$. $u_3 = 0,21 \times 0,79 = 0,1659$.
   On a donc : $u_1 > u_2 > u_3$.

   (b) *Etudier les variations de (u_n) (on démontrera le résultat par une récurrence).*

   La question précédente suggère de démontrer que (u_n) est décroissante. On va montrer :
   $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} \leq u_n \leq 1/2$. Montrons ceci par récurrence sur n :
   - la propriété est vraie pour $n = 1$ d'après la question précédente.
   - si on a $u_{n+1} \leq u_n \leq 1/2$ pour un certain n, alors f étant croissante sur $]-\infty, 1/2]$, $f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1/2) = 1/4 \leq 1/2$ et donc $u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1/2$: elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

   (c) *Démontrer par récurrence que (u_n) est minorée par 0.*

   - $u_1 = 0,3 > 0$.
   - si $u_n > 0$, alors f étant croissante, $f(u_n) > f(0)$. Puisque $f(0) = 0$, on obtient $u_{n+1} > 0$.
   La propriété $u_n > 0$ est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

   (d) *En déduire que (u_n) converge et donner la valeur limite du nombre d'individus de la population quand n tend vers l'infini.*

   Puisque (u_n) est une suite décroissante et minorée par 0, elle est convergente et sa limite vérifie $l \geq 0$. D'après la question 2 appliquée à $k = 1$, elle ne peut prendre que la valeur 0.

4. *Dans toute cette question, on fixe maintenant $k = 2$. En suivant une stratégie analogue à la question précédente (calcul et comparaison des premiers termes u_1, u_2 et u_3,*

étude des variations de (u_n), recherche d'une borne), démontrer que (u_n) est à nouveau convergente et déterminer sa limite.

– $u_2 = 2u_1(1 - u_1) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$. $u_3 = 2 \times 0,42 \times 0,58 = 0,4872$.
On a donc : $u_1 < u_2 < u_3$.

– Ce résultat suggère de démontrer que (u_n) est croissante. Montrons $\forall n \geq 1,\ 1/2 \geq u_{n+1} \geq u_n$.
- la propriété est vraie pour $n = 1$ d'après le calcul de u_1 et u_2.
- si on a $1/2 \geq u_{n+1} \geq u_n$ pour un certain n, alors f étant croissante sur $]-\infty, 1/2]$, $f(1/2) \geq f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ et donc $1/2 \geq u_{n+2} \geq u_{n+1}$: la propriété est donc vraie pour l'indice $n+1$.
On conclut donc qu'elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

– Montrons que (u_n) est majorée par $1/2$. La question précédente l'a démontré. On peut le démontrer indépendamment :
- $u_1 = 0,42 < 1/2$.
- si $u_n < 1/2$, alors f étant croissante, $f(u_n) < f(1/2)$. Puisque $f(1/2) = 1/2$, on obtient $u_{n+1} < 1/2$.
La propriété $u_n < 1/2$ est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

– Puisque (u_n) est une suite croissante et majorée par $1/2$, elle est convergente et sa limite vérifie $l \leq 1/2$. D'après la question 2 appliquée à $k = 2$, elle ne peut prendre que les valeurs 0 et $\frac{k-1}{k} = \frac{1}{2}$. La valeur 0 est impossible puisque ce n'est pas un majorant de la suite (la limite est la borne supérieure des u_n). Donc (u_n) converge vers $1/2$.

5. *Des deux valeurs $k = 1$ et $k = 2$, laquelle correspond à l'environnement le plus hostile ?*

Dans le premier cas, la population tend vers 0 et donc tend à disparaitre. Dans le second, elle augmente de 300.000 individus jusqu'à se rapprocher de 500.000. Le milieu est donc hostile pour $k = 1$ et favorable au développement de la population pour $k = 2$. Même dans ce second cas, les limites du milieu naturel (quantité de nourriture etc...) emêche la population de se développer au-delà d'une certaine valeur (ici 500.000).
