S2 Analyse : examen partiel du 26 mars 2010
durée : 1 heure.

calculatrice autorisée, documents interdits

I : connaissance du cours.

1. On admet que pour tout x appartenant à $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
   En déduire l'existence et la valeur des limites
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x}, \text{ puis } \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \text{ et } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$
2. Déterminer la limite : $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

II : un problème d'évolution de population.

On évalue chaque année numérotée n le nombre d'individus u_n d'une population d'animaux, exprimée en millions d'individus. La première année, on a 300.000 individus, et donc $u_1 = 0,3$. On constate que d'une année à l'autre, la population évolue par la loi :

$$u_{n+1} = f(u_n), \text{ avec } f(x) = kx(1-x).$$

La constante k est un paramètre réel strictement positif qui dépend du milieu où vit la population (plus ou moins hostile ou accueillant).

1. Démontrer que f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ (toutes les méthodes seront acceptées).
2. Expliquer pourquoi, lorsque (u_n) est convergente, sa limite l vérifie $f(l) = l$.
   Résoudre cette équation et donner les deux valeurs possibles pour l.
3. Dans toute cette question, on fixe $k = 1$.
   (a) Calculez u_2, u_3, et comparez u_1, u_2 et u_3.
   (b) Etudier les variations de (u_n) (on démontrera le résultat par une récurrence).
   (c) Démontrer par récurrence que (u_n) est minorée par 0.
   (d) En déduire que (u_n) converge et donner la valeur limite du nombre d'individus de la population quand n tend vers l'infini.
4. Dans toute cette question, on fixe maintenant $k = 2$. En suivant une stratégie analogue à la question précédente (calcul et comparaison des premiers termes u_1, u_2 et u_3, étude des variations de (u_n), recherche d'une borne), démontrer que (u_n) est à nouveau convergente et déterminer sa limite.
5. Décrire dans chaque cas l'évolution de la population.
   Des deux valeurs $k = 1$ et $k = 2$, laquelle correspond à l'environnement le plus hostile ?
