L3 MF — Algèbre
2010-11
Examen partiel, 27 octobre 2010
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction ! Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Question de cours. Enoncer la formule de Burnside, et la démontrer en admettant les résultats précédents du cours.

2. Exercice. Soit G un groupe d'ordre $2n$, avec n impair.
1. Montrer que G contient un élément d'ordre 2.
2. On considère la permutation des éléments de G définie par $g \to \sigma g$. Quelle est sa signature ?
3. En déduire que G contient un sous-groupe distingué d'ordre n.

3. Exercice. Montrer qu'un groupe d'ordre 200 n'est pas simple.

4. Exercice. Soient G un groupe. Pour $a, b \in G$ on appelle *commutateur* de a et de b l'élément $aba^{-1}b^{-1}$ de G. On note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les commutateurs de G, ou *groupe dérivé*.
1. Montrez que pour tout endomorphisme f de G, on a $f(D(G)) \subset D(G)$. En déduire de $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer que $G/D(G)$ est commutatif
3. Soit N un sous-groupe distingué de G. Montrez que G/N est abélien si et seulement si $D(G) \subset N$.
4. Soit A un groupe abélien et $f : G \to A$ un morphisme de groupe. Montrez que $D(G) \subset Ker(f)$.
5. En déduire qu'il existe un unique morphisme $\bar{f} : G/D(G) \to A$ tel que $\bar{f} \circ p = f$ où $p : G \to G/D(G)$ est la surjection canonique.
6. Application. On suppose que $G = F_2$, le groupe libre à deux générateurs, et on appelle $d : F_2 \to \mathbb{Z}$ l'application qui à un élément de F_2 associe la somme des puissances qui interviennent dans son écriture. Montrer que d est un morphisme. Identifier $F_2/D(F_2)$ puis l'application $\bar{d}$ construite à la question 5.