Université Le Mirail | **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique | **14 décembre 2012**

Examen partiel 2: Correction

Exercice 1

1. $\forall\, x_1,\, x_2 \in E,\, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
2. $\forall\, y \in F,\, \exists\, x \in E,\, y = f(x)$.
3. $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.
4. $f(A) = \{y \in F \mid \exists\, x \in A,\, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}$.

Exercice 2

1. f est injective car, si $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tels que $f(k_1) = f(k_2)$, alors :
$$4k_1 + 2 = 4k_2 + 2 \Rightarrow 4k_1 = 4k_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$
g est injective car, si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors :
$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$
2. f n'est pas surjective, en effet, $3 \in \mathbb{Z}$ et, supposons par l'absurde, qu'il existe $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tel que $f(k) = 3$. Alors, $4k + 2 = 3$, donc $k = 1/4 \notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ce qui est contradictoire.
g est surjective, en effet, soit $y \in \mathbb{R}$, posons $x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$. Alors $g(x) = 2(\frac{y-1}{2}) + 1 = y - 1 + 1 = y$.
Enfin, $Im(f) = \{2, 6, 10, 14, 18\}$ et $Im(g) = \mathbb{R}$.
3. f n'est pas bijective car pas surjective, on ne peut donc pas calculer f^{-1}.
g est bijective car injective et surjective. De plus $g^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.
4. $f \circ h(x) = f(2x + 1) = 4(2x + 1) + 2 = 8x + 6$ et $h' \circ f(k) = h'(4k + 2) = 2(4k + 2) + 1 = 8k + 5$.
On ne peut pas calculer $g \circ f$ et $f \circ g$ car ces applications ne sont pas définies sur les mêmes ensembles et ne sont pas à valeurs dans les mêmes ensembles.
5. Il y a cinq éléments dans $Im(f) = \{2, 6, 10, 14, 18\}$, ainsi, $card(Im(f)) = 5$.
   (a) $card\left(\mathcal{F}\left(\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{2, 6, 10, 14, 18\}\right)\right) = card(\{2, 6, 10, 14, 18\})^{card(\{0,1,2,3,4\})} = 5^5 = 3125$.
   (b) $A_5^5 = 5! = 120$.
   (c) $card(\mathfrak{S}_5) = 5! = 120$.
   Remarquons que, d'après le cours, si une application est injective et que l'ensemble de départ a le même nombre d'éléments que l'ensemble d'arrivée, alors c'est une bijection. C'est pour cela qu'il y a le même nombre d'injections que de bijections.

Exercice 3

1. D'après le cours, $card(E_k) = C_n^k$.
2. Comme $card(E) < +\infty$, $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow \exists\, k \in \{0, ..., n\}$, $A \subset E$ et $card(A) = k \Leftrightarrow \exists\, k \in \{0, ..., n\}$, $A \in E_k \Leftrightarrow A \in E_0 \cup ... \cup E_n$.
3. Par l'absurde, si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$, alors il existe $A_0 \in E_i \cap E_j$, c'est-à-dire $A_0 \in E_i$ et $A_0 \in E_j$. Donc $i = card(A_0) = j$, ce qui contredit l'hypothèse $i \neq j$.

4. Par les questions 2. et 3. on a :
$$\mathcal{P}(E) = E_0 \amalg E_1 \amalg ... \amalg E_n.$$
Les réunions étant disjointes, en passant au cardinal et en utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :
$$card(\mathcal{P}(E)) = card(E_0) + ... + card(E_n) = C_n^0 + ... + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Exercice 4

1. Soit $B \in F$, $x \in f^{-1}(F \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in F \setminus B \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in E \setminus f^{-1}(B)$.
2. $\boxed{\Rightarrow}$: Supposons que f est injective. Soit $A \subset E$, montrons que $f^{-1}(f(A)) = A$.
$\boxed{\subset}$: Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) \in f(A)$, par définition, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Comme f est injective, $x = a \in A$ et donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
$\boxed{\supset}$: Soit $a \in A$, en appliquant f on obtient $f(a) \in f(A)$. Enfin $f(a) \in f(A) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(f(A))$. Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.
$\boxed{\Leftarrow}$: Supposons que $A = f^{-1}(f(A))$, pour tout $A \subset E$ et montrons que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $f(x_1) \in f(\{x_2\})$, donc, $x_1 \in f^{-1}(f(\{x_2\}))$. Or, par hypothèses, $f^{-1}(f(\{x_2\})) = \{x_2\}$. Ainsi, $x_1 \in \{x_2\}$, c'est-à-dire, $x_1 = x_2$.
3. $\boxed{\Rightarrow}$: Supposons que f est surjective. Soit $B \subset F$, montrons que $f(f^{-1}(B)) = B$.
$\boxed{\subset}$: Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, il existe alors $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$, donc $y = f(x) \in B$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
$\boxed{\supset}$: Soit $b \in B$, comme f est surjective il existe $x \in E$ tel que $b = f(x)$. Or $f(x) = b \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$. Ainsi $b = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ et $B \subset f(f^{-1}(B))$.
$\boxed{\Leftarrow}$: Supposons que $f(f^{-1}(B)) = B$, pour tout $B \subset F$ et montrons que f est surjective. Soit $y \in F = f(f^{-1}(F))$, par définition, il existe $x \in f^{-1}(F) \subset E$ tel que $y = f(x)$.