Université Le Mirail **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique **14 décembre 2012**

Examen partiel 2

Ce sujet comporte 4 exercices. Les documents et appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas acceptés. Une attention toute particulière sera accordée à la qualité de la rédaction, toute affirmation devra être argumentée.

Durée de l'épreuve : 1h.

Exercice 1

Soient E et F deux ensembles, considérons une application $f : E \to F$. Donner les définitions suivantes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. $f^{-1}(B)$, pour $B \subset F$.
4. $f(A)$, pour $A \subset E$.

Exercice 2

Considérons les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \{0,1,2,3,4\} & \to & \mathbb{Z} \\ k & \mapsto & 4k+2 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$$

1. f et g sont-elles injectives ?
2. f et g sont-elles surjectives ? Calculer $Im(f)$ et $Im(g)$.
3. f et g sont-elles bijectives ? Si oui, calculer f^{-1} ou g^{-1}.
4. On note $h = g_{|\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\}}$ et $h' = g_{|\mathbb{Z}}$. Calculer $f \circ h$ et $h' \circ f$. Pourquoi ne peut-on pas calculer $g \circ f$ et $f \circ g$? Justifiez votre réponse.
5. Montrer que $card(Im(f)) = 5$. Combien y-a-t-il :
   (a) d'applications de $\{0,1,2,3,4\}$ dans $Im(f)$?
   (b) d'injections de $\{0,1,2,3,4\}$ dans $Im(f)$?
   (c) de bijections de de $\{0,1,2,3,4\}$ dans $Im(f)$?

Exercice 3

Soit E un ensemble à n éléments. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, considérons l' ensemble :

$$E_k = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid card(A) = k\}.$$

1. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, quel est le cardinal de E_k ?
2. Montrer que $\mathcal{P}(E) = E_0 \cup E_1 \cup ... \cup E_n$.
3. Soient $i, j \in \{0, ..., n\}$ tels que $i \neq j$. Montrer que $E_i \cap E_j = \emptyset$.
4. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $card\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^n$.

Exercice 4

Soient E et F deux ensembles, considérons une application $f : E \to F$. Montrer que :

1. $\forall B \subset F, f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$.
2. f injective $\Leftrightarrow \forall A \subset E, f^{-1}\left(f(A)\right) = A$.
3. f surjective $\Leftrightarrow \forall B \subset F, f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.