Examen partiel 1: Correction

Exercice 1

1. non(P) : $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n^2$.
   non(Q) : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\exists\, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n^2$.
   non(R) : $\forall\, A \in \mathbb{R}$, $A > 0$, $\exists\, x \in \mathbb{R}$, $x \geqslant A$ et $e^x < 1$.
2. (P) est vraie, il suffit de prendre $m = n^2 + 1$.
   (Q) est fausse car non(Q) est vraie, en effet il suffit de prendre $m = 0$.
   (R) est vraie car si $A = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant 1$, comme la fonction exponentielle est croissante, $e^x \geqslant e^1 > 1$.

Exercice 2

Montrons par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 7^n + 11 \text{ est divisible par } 6.$$

<u>Initialisation</u> : $7^0 + 11 = 1 + 11 = 12 = 6.2$, donc $7^0 + 11$ est divisible par 6. La propriété est donc vérifié pour $n = 0$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $7^n + 11$ est divisible par 6 et montrons que $7^{n+1} + 11$ est divisible par 6. Comme $7^n + 11$ est divisible par 6, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\text{(HR)} :\ 7^n + 11 = 6k.$$

Ainsi, $7^{n+1} + 11 = 7.7^n + 11 = 7(7^n + 11 - 11) + 11 = 7(7^n + 11) - 77 + 11 = 7(7^n + 11) - 66 \overset{\text{(HR)}}{=} 7.6k - 66 = 6(7k - 11)$. Donc $7^{n+1} + 11$ est divisible par 6.
<u>Conclusion</u> : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $7^n + 11$ est divisible par 6.

Exercice 3

1. Contraposée de (P) :
   $$\text{non}(xy \geqslant 0) \Rightarrow \text{non}(x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 1),$$
   c'est-à-dire :
   $$(xy < 0) \Rightarrow (x < 0 \text{ ou } y < 1).$$
2. La réciproque de (P) est :
   $$(xy \geqslant 0) \Rightarrow (x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 1).$$
   Elle est fausse car si $x = y = -1$, alors $xy = 1 \geqslant 0$ et $x < 0$ et $y < 1$.

Exercice 4

1. $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
2. (a) $\emptyset$, E, $\{1\}$, $\{5\}$.
   (b) $F \subset G$ car si $x \in F$ alors $x = 4k + 2 = 2(2k + 1)$ est pair, c'est-à-dire, $x \in G$.
   $G \not\subset F$ car $4 \in G$ mais $4 \notin F$ (sinon, $4 = 4k + 2$ c'est-à-dire, $k = \frac{1}{2}$ ce qui est absurde vu que $k \in \mathbb{Z}$ et $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$).
   $G \neq F$ car $G \not\subset F$.
   (c) Par l'absurde, si $E \cap F \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in E \cap F$. Or, ($x_0 \in E \Rightarrow x_0$ est impair) et ($x_0 \in F \Rightarrow x_0$ est pair). Donc, comme $x_0 \in E$ et $x_0 \in F$ alors x_0 est à la fois pair et impair, c'est absurde. Ainsi, $E \cap F = \emptyset$.