Université Le Mirail **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique **9 novembre 2012**

Examen partiel 1

Ce sujet comporte 4 exercices. Les documents et appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas acceptés. Une attention toute particulière sera accordée à la qualité de la rédaction, toute affirmation devra être argumentée.

Durée de l'épreuve : 1h.

Exercice 1

On considère les assertions suivantes :

$$(P) : \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m \in \mathbb{N},\ m > n^2;$$
$$(Q) : \ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, m \in \mathbb{N},\ m > n^2;$$
$$(R) : \ \exists\, A \in \mathbb{R},\ A > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geqslant A \Rightarrow e^x \geqslant 1.$$

1. Écrire les négations de (P), (Q) et (R).
2. En justifiant les réponses, dire si (P), (Q) et (R) sont vraies ou fausses.

Exercice 2

On rappelle que p est divisible par q s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = kq$. Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 7^n + 11 \text{ est divisible par } 6.$$

Exercice 3

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on considère l'assertion :

$$(P) : \ (x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 1) \Rightarrow (xy \geqslant 0).$$

1. Donner la contraposée de (P).
2. La réciproque de (P) est-elle vraie ?

Exercice 4

1. Soit E un ensemble, considérons deux sous-ensembles A et B de E. Donner la définition de $A \cap B$.
2. Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ suivants :

$$E = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\},\ F = \{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\},\ G = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \text{ est pair}\}.$$

   (a) Donner quatre éléments de $\mathcal{P}(E)$.
   (b) A-t-on $F \subset G$? $G \subset F$? $G = F$? Justifiez vos réponses.
   (c) Montrer que $E \cap F = \emptyset$.