Exercices de mathématiques

1 Fonctions : généralités et fonctions classiques

Exercice 1. Dessiner puis déterminer l'ensemble des x réels tels que

$$1)\ \ln x > 1, \quad 2)\ e^{2x} < 7, \quad 3)\ x^2 > 2, \quad 4)\ (x+3)(e^x - 1) < 0.$$

Exercice 2. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-7}$, 2) $g(x) = \ln(2x+3)$, 3) $h(x) = \dfrac{1}{e^{x^3-18}}$,

4) $F(x) = \ln(x^2 + 3x - 10)$, 5) $G(x) = \sqrt{x-1}$, 6) $H(x) = (e^x - 1)^{-2}$.

Exercice 3. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1) $16 - e^{2x} = 0$, 2) $\ln(5x) + \ln(x+1) = \ln 10$, 3) $2\ln x - \ln(x+1) = \ln 3$,

4) $20\ln^2 x - 16\ln x + 3 = 0$, 5) $2e^{-x} + e^x - 3 > 0$, 6) $\dfrac{e^{2x}e^{x-1}}{e^{x+3}} < 1$.

Exercice 4. Équation de Nerst
On se donne deux compartiments A et B de même volume contenant de l'eau pure et séparés par une membrane poreuse. Dans le compartiment A, on dissout un composé chimique qui se dissocie en 2 types d'ions. Si on suppose que la membrane poreuse ne laisse passer qu'une espèce (dite perméante) d'ions entre les 2 compartiments, il s'établit une différence de potentiel entre les 2 compartiments qui est modélisée par l'équation de Nerst suivante

$$V_{AB} = \frac{RT}{zF} ln\left(\frac{[X]_A}{[X]_B}\right)$$

où
- $V_{AB} = E_A - E_B$ est la différence de potentiel entre le compartiment A et le compartiment B,
- R est la constante des gaz parfaits,
- T est la température en Kelvin,
- z est la charge de l'ion perméant (avec le signe),
- F est la constante de Faraday
- $[X]_i$, $i \in \{A, B\}$, est la concentration de l'espèce perméante dans le compartiment i.

1. Que se passe-t-il si on échange les compartiments ?
2. Exprimer $[X]_A$ en fonction de $[X]_B$ et V_{AB}.

2 Probabilités

Exercice 5. Les groupes sanguins furent découverts en 1901 par Karl Landsteiner. On distingue quatre phénotypes (c'est-à-dire groupes sanguins) : A, B, AB et O.
Les gènes A, B et O sont les trois allèles qui déterminent les quatre groupes sanguins. On sait que A et B sont dominants et que O est récessif. Ainsi, on peut dire :
– le phénotype O correspond au génotype O/O
– le phénotype A correspond aux génotypes A/A et A/O
– le phénotype B correspond aux génotypes B/B et B/O
– le phénotype AB correspond au génotype A/B
On rappelle que le génotype d'un individu est déterminé par deux allèles : l'un hérité de la mère et l'autre du père. Ces deux transmissions d'allèles (père/mère) sont totalement indépendantes.
Chaque parent a lui-même deux allèles qui définissent son groupe sanguin et il transmet l'un ou l'autre avec la même probabilité 0.5.
On sait que dans la population, la répartition des allèles est : 68% pour l'allèle O, 25% pour l'allèle A et 7% pour l'allèle B.

1. Un individu (adulte) est pris au hasard dans la population. Donnez la probabilité qu'il transmette l'allèle A à son enfant (même question avec les allèles B et O).
2. Lorsqu'on prend un individu au hasard dans la population, on note $[A]$ l'événement *"être du groupe sanguin A"* (de même pour $[B]$, $[O]$ et $[AB]$). Calculez la probabilité de ces quatre événements.
3. Au 19ème siècle, on réalisait les transfusions sanguines au hasard, sans se soucier des groupes sanguins. Aujourd'hui, on sait que les groupes sanguins ne sont pas forcément compatibles. Les incompatibilités sont résumées dans le tableau suivant ($\emptyset$ signifie "incompatible") :

	Donneur O	Donneur A	Donneur B	Donneur AB
Receveur O		$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
Receveur A			$\emptyset$	$\emptyset$
Receveur B		$\emptyset$		$\emptyset$
Receveur AB				

   On suppose qu'on fait une transfusion sanguine à un individu pris au hasard avec du sang prélevé chez un autre individu pris au hasard, sans se soucier des groupes sanguins. Calculez la probabilité qu'il y ait incompatibilité.
4. On suppose que 10% des individus du groupe O sont hémophiles, 8% des individus du groupe A sont hémophiles, 7% des individus du groupe B sont hémophiles et 8% des individus du groupe AB sont hémophiles.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un individu qui est du groupe sanguin O soit hémophile ? Quelle est la probabilité qu'un individu soit du groupe sanguin O et hémophile ?
   (b) Un individu du groupe sanguin O est pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas hémophile ?
   (c) Un individu est pris au hasard dans la population. Quelle est la probabilité qu'il soit hémophile ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'un individu non hémophile soit du groupe sanguin A ?

Exercice 6. Un laboratoire pharmaceutique vient de créer un produit anticoagulant qui provoque malheureusement des allergies. On suppose que la population est formée de 45% d'hommes et de 55% de femmes. On a remarqué que la proportion des individus qui sont à la fois allergiques et de sexe masculin est de 0.2 . De même, la proportion des individus qui sont à la fois allergiques et de sexe féminin est de 0.1 .

1. On choisit au hasard un homme dans la population. Calculez la probabilité qu'il soit allergique.
2. Calculez la probabilité qu'un individu pris au hasard soit allergique au produit.
3. Est-ce que le fait d'être allergique au produit est indépendant du sexe ?
   On sait que la répartition suivant les groupes sanguins est

O	A	B	AB
46 %	40 %	10 %	4 %

   On a remarqué que parmi les individus du groupe sanguin A, 20% sont allergiques. De même, 15% des individus du groupe B sont allergiques et 5% des individus du groupe AB sont allergiques.
4. On choisit au hasard un individu allergique au produit. Calculez la probabilité qu'il soit du groupe sanguin B.
5. Un individu de groupe sanguin O est choisi au hasard. Calculez la probabilité qu'il soit allergique.
   On sait que parmi les individus de groupe sanguin O, 60% sont de Rhésus positif. On a remarqué que la probabilité qu'un individu soit allergique sachant qu'il est du groupe O^+ (groupe O rhésus +) est 0.2 .
6. Calculez la probabilité qu'un individu soit à la fois allergique et du groupe sanguin O^+.

Exercice 7. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de fraises produites en une semaine, au printemps, par un plant d'une variété de fraisier. On a observé les valeurs de X avec les fréquences :

nombre de fraises	3	4	5	6	7
fréquence	0.1	0.23	0.36	0.2	0.11

1. Calculez la moyenne $E(X)$ ainsi que l'écart-type $\sigma(X)$ de X.
2. Donnez la probabilité qu'un plant de fraisier ait une production inférieure ou égale à 5 fraises en une semaine.
3. On note maintenant Y la variable aléatoire représentant le nombre de fraises produites en une semaine par 7 plants de fraisier au printemps. On suppose que les productions de deux fraisiers plantés à proximité sont indépendantes. Donnez la moyenne $E(Y)$ ainsi que l'écart-type $\sigma(Y)$ de Y.

Exercice 8. Loi Binomiale/loi de Poisson
On a estimé qu'un certain vaccin peut provoquer une légère réaction allergique, à une fréquence d'une allergie sur cent vaccinations.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de réactions allergiques dans des échantillons de 20 personnes vaccinées.

1. Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ dont on précisera les paramètres.
   Rappeler alors la loi de probabilité de X, sa moyenne $E(X)$ ainsi que son écart-type $\sigma(X)$.
   Calculez la probabilité $Pr(X > 2)$.

On a remarqué que ce vaccin peut également provoquer des accidents graves à une fréquence d'un accident pour 100 000 vaccinations. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre d'accidents graves survenus dans des échantillons de 30 000 personnes vaccinées. Ainsi, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(m, \pi)$ avec $m = 30\,000$ et $\pi = 0.00001$.

2. Calculez $Pr(Y = 0)$ et $Pr(Y = 1)$ (on gardera beaucoup de chiffres après la virgule).
3. Pourquoi peut-on supposer que Y suit approximativement une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ dont on déterminera le paramètre $\lambda > 0$? Vérifiez que cette approximation est plutôt bonne en recalculant $Pr(Y = 0)$ et $Pr(Y = 1)$ à partir de la loi de Poisson.
4. En utilisant la loi de Poisson, tracez les points $\big(k, Pr(Y = k)\big)$ pour $k \in \{0, \dots, 4\}$.

Exercice 9. Loi de Poisson
L'expérience de Luria et Delbrück (1943) a démontré que l'apparition de mutants dans une culture bactérienne est un phénomène aléatoire, les mutations sont spontanées et ne sont pas induites par le milieu.
On met en culture des bactéries *coli* dans un milieu contenant un antibiotique (*streptomycine*) et on laisse se développer les colonies. On s'intéresse alors aux bactéries qui présentent une mutation de résistance à l'antibiotique (mutant SmR). On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de bactéries mutantes dans une colonie. On modélise les fluctuations de X par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ qu'on va chercher à déterminer.
Expérimentalement, on a obtenu 166 colonies parmi lesquelles 15 ne possèdent aucune bactérie mutante.

1. Déterminez le réel λ.
2. Donnez le nombre moyen de bactéries mutantes par colonie. Donnez également l'écart-type.
3. Si Z est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$ de paramètre $\mu > 0$, montrez qu'on a alors la relation $Pr(Z = k + 1) = \frac{\lambda}{k+1} Pr(Z = k)$.
4. En utilisant la propriété du 3, calculez (rapidement) les $Pr(X = k)$ pour $k \in \{0, \dots, 9\}$.
   Tracez alors les points $\big(k, Pr(X = k)\big)$ pour $k \in \{0, \dots, 9\}$. Comparez avec le graphique fait à la question 4 de l'exercice "Loi Binomiale/loi de Poisson".

3 Fonctions : limites et continuité

Exercice 10. Etudier les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x}, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0} x^{-3} e^{-x}, \qquad 3)\ \lim_{x\to+\infty} x^{-2} (\ln x)^3,$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty} (x \ln x)^{-4} e^x, \quad 5)\ \lim_{x\to 0}\ (\ln x)^4 x e^{-2x}, \quad 6)\ \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{2x}.$$

Exercice 11. Calculer (si elles existent !) les limites suivantes :

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} -3x^2 + x + 1, \qquad 2)\ \lim_{x\to-\infty} 4x^5 - 3x^4 + x^2 - 2,$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^5 - 3x^4 + x^2 - 2}{-3x^2 + x + 1}, \quad 4)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln(e^x + e^{-x}).$$

Exercice 12. La figure 1 représente le graphe, en gras, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (Attention : le repère n'est pas orthonormé !), ainsi que les graphes de deux droites D_1 et D_2.

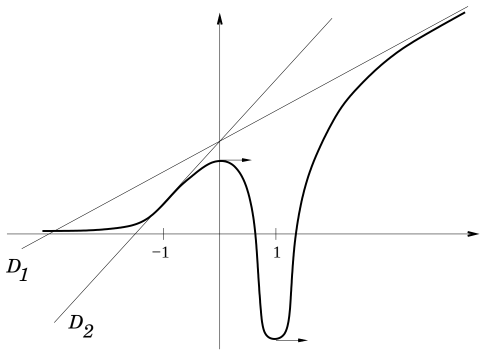

FIGURE 1 – Graphe de f et de 2 droites D_1 et D_2.

1. Dire à quelle droite correspond chaque équation

$$y = x + 3, \quad (1)$$
$$y = 2x + 3. \quad (2)$$

2. Expliquez pourquoi on a $f(x) < 3$ pour tout x dans l'intervalle $[-1, 1]$.
3. D'après le graphe de f donné, quelles semblent être les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$?

Dans les deux questions suivantes, on admet que le comportement de f en $-\infty$ et en $+\infty$ est le même que celui que laisse supposer le graphe donné dans l'énoncé.

4. Donner le signe sur $\mathbb{R}$ de la dérivée f' de f. Dressez alors le tableau de variations de f.
5. Donner une valeur approchée du réel γ vérifiant $f(\gamma) = 10$.

Exercice 13. Les fonctions suivantes sont-elles continues ?

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ 2e^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad 2)\ g(x) = \begin{cases} 4e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$3)\ h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^4 + 5x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 14. Variations de la température dans l'atmosphère en fonction de l'altitude : un modèle simple

Le modèle le plus simple de prise en compte des variations de la température dans l'atmosphère en fonction de l'altitude suppose la température affine par morceaux avec

- une variation de -3.7 degrés par kilomètre entre 0 et 11 km,
- une variation de 0 degrés par kilomètre entre 11 et 20 km,
- une variation de $+0.9$ degrés par kilomètre entre 20 et 32 km,
- une variation de $+2.8$ degrés par kilomètre entre 32 et 47 km.

Sachant que la température moyenne au niveau de la mer est de 15 degrés, exprimer la température T en degrés en fonction de l'altitude h en kilomètres et tracer le graphe correspondant.

4 Fonctions : dérivabilité

Exercice 15. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 5$, 2) $f_2(x) = (x^2+1)e^{2x}$, 3) $f_3(x) = \ln(x^2 + e^x)$,

4) $f_4(x) = (2x+1)^3$, 5) $f_5(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$, 6) $f_6(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-3}$,

7) $f_7(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{2-3x}\right)$, 8) $f_8(x) = x^3 e^{-x} \ln(x)$.

Exercice 16. La figure 2 montre le nombre de phoques et d'ours dans une population arctique. L'évolution de ces deux populations a été étudiée sur une période de 600 jours.

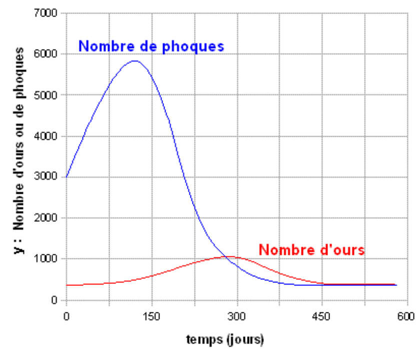

FIGURE 2 – Nombre de phoques et d'ours dans une population arctique.

1. Quelles sont les populations initiales de phoques et d'ours ?
2. Quelle est la vitesse de croissance de la population de phoques à l'instant initial ?
3. Quelle est la valeur de la dérivée de la population de phoques en fonction du temps lorsque le nombre de phoques est le plus important ? Lorsqu'il est le moins important ?
4. Faire un tracé approximatif de la dérivée de la population de phoques en fonction du temps.
5. En déduire des valeurs approximatives de la taille de la population de phoques lorsque sa dérivée est la plus grande ; lorsque sa dérivée est la plus faible.

Exercice 17. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = 2x^2y^2 - x^2y + 3xy - 5y^3 + 1$, 2) $g(x,y) = \dfrac{x}{e^y}$, 3) $h(x,y) = \ln(x+y)$.

Exercice 18. Considérons un fluide décrit par l'équation d'état de Van der Waals

$$\left(P + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)(V - nb) = nRT \quad (3)$$

où

- P est la pression du gaz en Pascal,
- V est le volume occupé par le gaz en m^3,

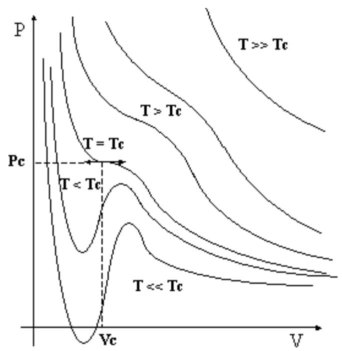

FIGURE 3 – Graphes des fonctions P=F(V) à température constante pour différentes valeurs de température.

- n est la quantité de matière en moles,
- $R := 8.314472 J\, K^{-1}\, mol^{-1}$ est la constante des gaz parfaits,
- T est la température absolue en Kelvin,
- a et b sont des paramètres dépendant du gaz.

Très grossièrement, si on trace les isothermes du gaz, c'est-à-dire les graphes des fonctions P=F(V) à température constante pour différentes valeurs de température (voir figure 3), on a 2 types de courbes :

- Pour $T > T_C$, à chaque pression ne correspond qu'un volume possible.
- Pour $T < T_C$, à chaque pression correspondent plusieurs volumes (cela s'explique par le fait que les phases gazeuses et liquides peuvent cohabiter).

On appelle point critique le point de transition qui correspond à la fois à une tangente horizontale et à un point d'inflexion. Mathématiquement, cela correspond donc à

$$\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_{T=T_C} = \frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\Big|_{T=T_C} = 0.$$

Notons à l'aide d'un indice C les pression P_C, volume V_C et température T_C du fluide au point critique.

1. Exprimer les coefficients a et b du fluide considéré en fonction de P_C, V_C, T_C, n, R.
2. Exprimer l'équation d'état (3) en fonction des variables réduites

$$\Pi := \frac{P}{P_C}, \quad \Theta := \frac{T}{T_C}, \quad \Phi := \frac{V}{V_C}.$$

5 Intégration

Exercice 19. Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

1) $\int_0^2 (2t^3 - 3t^2 + \frac{t}{2} - 1)\, dt$, 2) $\int_0^1 \frac{3}{t+1}\, dt$, 3) $\int_1^2 \frac{-5}{2t+3}\, dt$, 4) $\int t^2(1+2t^3)^5\, dt$,

5) $\int \frac{3t}{(3-t^2)^3} dt$, 6) $\int te^{t^2} dt$, 7) $\int \frac{2}{2-t} dt$, 8) $\int \frac{t}{(t^2+1)^4} dt$,

9) $\int \frac{t^3}{2t^4+1} dt$, 10) $\int (\sin t)e^{\cos t} dt$, 11) $\int \frac{\ln t}{t} dt$, 12) $\int \frac{1}{t \ln t} dt$.

Exercice 20. En utilisant une intégration par parties, calculez les intégrales suivantes :

1) $\int_0^2 (t-1)e^{2t} dt$, 2) $\int_0^{\pi} 2t \sin(3t) dt$, 3) $\int_2^3 \ln t\, dt$.

Exercice 21. La pression atmosphérique, à altitude donnée z, est due au poids de la colonne d'air située au dessus de la surface considérée S ("parallèle" à la surface de la terre, à altitude z). On note $m(z)$ la masse de l'air au dessus de la surface S à l'altitude z. On a ainsi la formule $P(z) = \frac{m(z)g}{S}$ où g est la constante de pesanteur.

1. On note ρ la masse volumique et dz une petite variation d'altitude. Exprimer la différence $m(z+dz) - m(z)$ en fonction de S, ρ et dz.
2. En déduire une expression de $P(z+dz) - P(z)$ puis de $\frac{dP}{dz}$.
3. Si on suppose que la masse volumique ρ est constante (fluide incompressible), donnez l'expression de $P(z)$.
4. L'air est en fait compressible. Si on utilise l'équation des gaz parfaits $PV = nRT$, on obtient alors $\rho = \alpha \frac{P}{T}$ où α est une constante positive. Par ailleurs, la température varie en fonction de l'altitude ($T = T(z)$). On suppose que cette variation est linéaire : $T(z) = T_0 - \beta z$ où β est une constante positive. Donnez l'expression de la pression $P(z)$.

Exercice 22. Un corps de température T_0 est placé dans un environnement de température T_a. Sa température est donnée en fonction du temps par la loi de refroidissement de Newton :
$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$ où k est une constante. Calculer la température moyenne T_m du corps entre un temps t_1 et un temps t_2.

Exercice 23. On considère la réaction chimique $A + B \longrightarrow C + D$ (par exemple, $OH^- + CH_3I \longrightarrow CH_3OH + I$). On note $a(t)$ et $b(t)$ les concentrations en A et B en fonction du temps (t est exprimé en heures). On suppose connu que la réaction est d'ordres partiels 1 en A et B, c'est-à-dire :

$$-\frac{da}{dt} = -\frac{db}{dt} = ka(t)b(t)$$

où k est une constante positive que l'on va chercher à déterminer. On a fait les mesures suivantes :

t	0	1	2	3	4
$a(t)$	4.6	3.97	3.59	3.36	3.28
$b(t)$	6.2	3.21	1.78	1.12	0.72

1. On note $\theta(t)$ la fonction définie par $\theta(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$. En utilisant la méthode des trapèzes, calculez des valeurs approchées de $\theta(1)$, $\theta(2)$, $\theta(3)$ et $\theta(4)$.
2. Ecrire l'expression de $\ln b(t)$ en fonction de $\theta(t)$. En déduire une valeur approchée de la constante k.

6 Equations différentielles

Exercice 24. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - 2y(x) = 0$,
2. $xy'(x) - y(x) = 0$, sur $]0, +\infty[$ avec $y(1) = 2$,
3. $y'(x) + xy(x) = 0$.

Exercice 25. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'(x) - 5y(x) = xe^{2x}$,
2. $y'(x) - 5y(x) = xe^{5x}$,
3. $xy'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1+x}$ sur $]0, +\infty[$,
4. $(x+2)y'(x) - 3y(x) = -5$ sur $]-2, +\infty[$, avec la condition $y(0) = 1/8$,
5. $(1+x)y'(x) + 2y(x) = e^x$ sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 26. Profil de température
On considère un problème à une dimension, avec l'axe vertical positif vers le bas, perpendiculaire au plan du sol. On étudie le profil de température dans ce sol, dont on maintient la température à
- $T = 0$ à la profondeur $z = 0$
- et $T = T_1 > 0$ à la profondeur $z = L$.

On installe dans ce sol un système de chauffage qui fournit une quantité de chaleur R. L'évolution de la température dans le sol est alors donnée par l'équation différentielle : $\dfrac{d^2T}{dz^2} = R.$.

Résoudre cette équation différentielle, donner le profil de température en fonction de T_1, R et L et représenter graphiquement ce profil de température.

Exercice 27. Un médicament administré par voie orale est éliminé par la fonction reinale. On suppose que la durée d'absorption par voie orale est négligeable (à t=0, la quantité Q_0 de produit est présente dans le tube digestif). La vitesse de passage du médicament du système digestif à la circulation sanguine est proportionnelle à la quantité de médicament restant dans le tube digestif (de constante d'absorption $k_a > 0$). La vitesse d'élimination du médicament par les reins est proportionnelle à la quantité présente dans le sang (de constante d'élimination k_e, $0 < k_e < k_a$). On note $Q(t)$ (respectivement $S(t)$) la quantité de médicament présent dans le tube digestif (resp. dans le sang) à l'instant t.

1. Calculer la quantité de médicament dans le tube digestif en fonction du temps.
2. Expliquer la relation suivante : $S'(t) = k_aQ(t) - k_eS(t)$. En déduire l'expression de $S(t)$.
3. Au bout de combien de temps la quantité de médicament dans le sang sera-t-elle maximale ?

Exercice 28. L'effectif $N(t)$ (exprimé en milliers) d'une population de microbes s'accroit pendant l'intervalle de temps Δt de la moitié du produit $N(100 - N)\Delta t$.

1. Etablir l'équation différentielle satisfaite par $N(t)$.
2. On pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$. Donner l'équation différentielle satisfaite par $y(t)$.
3. Donner l'expression de $y(t)$ et en déduire $N(t)$.
4. Sachant que $N(0) = 50$, étudier l'évolution de la population au cours du temps. En particulier, quel est l'effectif limite quand t tend vers l'infini ?

Exercice 29. Cinétique chimique
Dans tout cet exercice, on notera $a = [A]$ la concentration de l'espèce A.

1. Réactions chimiques d'ordre 1 par rapport à tous les réactifs.
   (a) Pour une réaction du type $A \to B$, cela correspond à une équation différentielle du style
   $$-\frac{da}{dt} = ka^1 = \frac{db}{dt}.$$
   Résoudre l'équation différentielle en a en fonction de la concentration initiale a_0 de l'espèce A et donner la concentration de l'espèce b en fonction du temps.
   (b) Pour une réaction du type $A + B \to C$, cela correspond à une équation différentielle du style
   $$-\frac{da}{dt} = -\frac{db}{dt} = \frac{dc}{dt} = kab.$$
   En utilisant le bilan de matière, écrire une équation différentielle en a uniquement qui dépendra de $\lambda_0 := b_0 - a_0$. Donner ensuite la solution générale de cette équation différentielle. Attention, il faudra discuter suivant les valeurs de λ_0.
2. Réaction chimique $A \to B$ d'ordre α par rapport à tous les réactifs. Cela correspond à une équation différentielle du style
   $$-\frac{da}{dt} = ka^\alpha = \frac{db}{dt}.$$
   Résoudre l'équation différentielle en a en fonction de la concentration initiale a_0 de l'espèce A, pour $\alpha \neq 1$.

Exercice 30. Illustration de la méthode d'Euler
On considère l'équation différentielle $f'(t) + f(t) = 0$, avec la condition initiale $f(0) = 1$, sur l'intervalle $[0, 5]$.

1. Appliquer la méthode d'Euler à cette équation différentielle en prenant un pas constant égal à $\delta t = 1$ et tracer la solution approchée ainsi obtenue.
2. Même question avec $\delta t = 0.5$.
3. Comparer à la solution exacte.

Exercice 31. Dynamique de 2 populations en compétition
On considère le modèle de dynamique de 2 populations en compétition suivant :

$$\begin{cases} N_1'(t) &= f_1\Big(N_1(t), N_2(t)\Big) &= \Big(1 - \frac{1}{2}N_1(t) - \frac{1}{3}N_2(t)\Big)N_1(t)) \\ N_2'(t) &= f_2\Big(N_1(t), N_2(t)\Big) &= \Big(1 - N_1(t) - \frac{1}{2}N_2(t)\Big)N_2(t \end{cases} \tag{4}$$

où $N_i(t)$ est l'effectif de l'espèce i à l'instant t.

1. Trouver les isoclines verticales du système (4) en résolvant $f_1\Big(N_1(t), N_2(t)\Big) = 0$.
2. Trouver les isoclines horizontales du système (4) en résolvant $f_2\Big(N_1(t), N_2(t)\Big) = 0$.
3. Calculer tous les points d'équilibre (points d'intersection des isoclines horizontales et verticales) du système (4).
4. Dans le plan (N_1, N_2), tracer les isoclines du système (4), repérer les points d'équilibre et indiquer, dans chaque région et sur les isoclines, les flèches donnant l'allure du champ de vecteur.
5. Que penser de l'évolution, selon ce modèle, des 2 populations ?

7 Des exercices supplémentaires pour s'entraîner !

Exercice 32. Dans la région de Narbonne, il n'y a que cinq variétés de coccinelles selon le nombre de points noirs : 20% ont 2 points, 25% ont 5 points, 40% ont 7 points, 10% ont 10 points et 5% ont 14 points. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points noirs d'une coccinelle.

1. Est-ce que la variable aléatoire X suit une loi Binomiale ? (justifiez)
2. Calculez l'espérance $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de X.
   Raymond utilise les coccinelles pour éliminer naturellement les pucerons de son jardin. Malheureusement, son voisin a préféré la solution chimique et asperge son jardin de produit anti-pucerons ce qui contamine les coccinelles qui viennent visiter son jardin. Bien entendu Raymond a du mal à interdire aux coccinelles d'aller chez le voisin. Il a constaté que 41% des coccinelles sont ainsi contaminées. De façon plus précise, il a remarqué que 39% des coccinelles à 2 points sont contaminées, 35% des coccinelles à 5 points sont contaminées, 45% des coccinelles à 7 points sont contaminées et 33% des coccinelles à 10 points sont contaminées.
3. Une coccinelle à 7 points est prise au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas contaminée ?
4. Quelle est la probabilité qu'une coccinelle prise au hasard soit contaminée et ait 2 points ?
5. Une coccinelle contaminée est prise au hasard ; quelle est la probabilité qu'elle ait 7 points noirs ?
6. Calculez la probabilité qu'une coccinelle à 14 points noirs prise au hasard soit contaminée.
7. Calculez la probabilité qu'une coccinelle ayant un nombre de points noirs inférieur ou égal à 5 soit contaminée.

Exercice 33. Équilibre acide/base
On considère l'équilibre acide/base suivant $HA + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$ où HA est l'acide et A^- sa base conjuguée.

Notons C_0 la concentration initiale en acide et $\alpha_{eq} := \dfrac{[A^-]_{eq}}{C_0}$ le taux de dissociation de l'acide à l'équilibre.

On rappelle que la constante d'acidité s'écrit $Ka = \dfrac{[A^-]_{eq}[H_3O^+]_{eq}}{[HA]_{eq}}$ (quotient de concentrations à l'équilibre) et on note $pKa = -log(Ka)$.
On rappelle également la signification du pH d'une solution : $pH = -log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+.
Un acide est d'autant plus fort que son taux de dissociation est fort.

1. Calculer α_{eq} en fonction de C_0 et Ka.
2. Montrer que si $\dfrac{Ka}{C_0} << 1$, $\alpha_{eq} \sim \sqrt{\frac{Ka}{C_0}}$.
3. Compléter les phrases suivantes :
   - Plus Ka est ..., plus l'acide est fort.
   - Plus pKa est ..., plus l'acide est fort.
4. Exprimer pH en fonction de pKa et α_{eq}.
5. En déduire α_{eq} en fonction de pH et pKa.

Exercice 34. On étudie la compétition entre 2 populations de scorpions du désert, noirs et rouges respectivement, qui se nourrissent de la même ressource et que l'on modélise par un système du type suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} N_n'(t) &=& 0.1N_n(t)\Big(3 - 0.06N_n(t) - 0.02N_r(t)\Big), \\ N_r'(t) &=& 0.1N_r(t)\Big(1 - 0.01N_n(t) - 0.02N_r(t)\Big). \end{array}\right. \tag{5}$$

où et $N_r(t)$ est l'effectif des scorpions rouges à l'instant t et $N_n(t)$ est l'effectif des scorpions noirs à l'instant t.

1. Préciser quel est le taux de croissance intrinsèque r et la capacité biotique K de la population de scorpions noirs lorsque l'autre population est absente. On pourra pour cela mettre l'équation sous la forme $x' = rx\left(1 - \dfrac{x}{K}\right)$.
2. On suppose à présent que les 2 populations cohabitent.
   (a) Trouver les isoclines verticales du système (5).
   (b) Trouver les isoclines horizontales du système (5).
   (c) Calculer tous les points d'équilibre du système (5).
   (d) Dans le plan (N_1, N_2), tracer les isoclines du système (5), repérer les points d'équilibre et indiquer, dans chaque région et sur les isoclines, les flèches donnant l'allure du champ de vecteur.
   (e) Que penser de l'évolution, selon ce modèle, des 2 populations ?

Exercice 35. Un bateau-citerne a coulé au large de la Bretagne. On souhaite alors retirer le pétrole restant dans une de ses cuves. Pour ce faire, on introduit dans la cuve une quantité N_0 de bactéries qui ont la propriété d'éliminer le pétrole. Ces bactéries se reproduisent et on note $N(t)$ la quantité de bactéries présentes dans la cuve au temps t. On suppose que l'évolution de la quantité de bactéries suit la propriété suivante : *pendant un petit intervalle de temps Δt, la variation de quantité ΔN est proportionnelle (avec un coefficient constant $k > 0$) à Δt et la quantité de bactéries présentes dans la cuve.*

1. Expliquer pourquoi $N(t)$ satisfait l'équation différentielle $N'(t) - kN(t) = 0$.
   Donner alors l'expression de $N(t)$ et tracer approximativement le graphe de $N(t)$.
2. Pour tout t, on note $T(t)$ le temps nécessaire pour que la quantité au temps $t + T(t)$ soit le double de la quantité au temps t (temps de doublement de vies). Montrer que $T(t)$ ne dépend pas de t et en donner une expression en fonction de k.
3. On suppose que le temps t est exprimé en heures. On a observé qu'au bout de 3 heures, la quantité de bactéries avait doublé par rapport à la quantité de départ N_0. Calculer alors k.
4. On suppose que $N_0 = 10^3$. Avec la valeur de k donnée à la question précédente, calculer le temps T au bout duquel on aura 10^6 bactéries dans la cuve ?
   On note $Q(t)$ la quantité de pétrole présent dans la cuve. On suppose qu'à $t = 0$, on avait une quantité $Q(0) = Q_0$. On suppose que l'élimination du pétrole par les bactéries se fait de la façon suivante : *la vitesse d'élimination de la quantité de pétrole éliminé est proportionnelle (avec un coefficient constant $\lambda > 0$) à la quantité de bactéries présentes dans la cuve.*
5. En utilisant cette hypothèse, donner l'expression de $Q'(t)$. En déduire alors que
$$Q(t) = Q_0 + \frac{\lambda N_0}{k} - \frac{\lambda N_0}{k} e^{kt}.$$
6. Tracer approximativement le graphe de $Q(t)$ et déterminer en fonction de Q_0, N_0, λ et k le temps τ à partir duquel toute la quantité de pétrole aura disparu.