Examen terminal

Exercice

1. $e \in Z(G)$ car, par définition du neutre, pour tout $h \in G$, $eh = he$.
   De plus, si $g_1, g_2 \in Z(G)$, alors pour tout $h \in G$, on a :
   $$g_1 g_2^{-1} h = g_1 (h^{-1} g_2)^{-1} = g_1 (g_2 h^{-1})^{-1} = g_1 h g_2^{-1} = h g_1 g_2^{-1}.$$
   Ainsi $g_1 g_2^{-1} \in Z(G)$.
2. Soit $g \in Z(G), h \in G$, alors : $hgh^{-1} = ghh^{-1} = g \in Z(G)$.
3. (a) Soit $g \in G$, alors $\overline{g} \in G/Z(G) = \langle \overline{g_0} \rangle$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
   $$\overline{g} = \overline{g_0}^k = \overline{g_0^k}.$$
   Par définition, il existe $h \in Z(G)$ tel que $g = g_0^k h$.

   (b) Soient $g_1, g_2 \in G$, alors, d'après la question précédente, il existe $h_1, h_2 \in Z(G)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $g_1 = g_0^{k_1} h_1$ et $g_2 = g_0^{k_2} h_2$. Ainsi :
   $$\begin{aligned} g_1 g_2 &= g_0^{k_1} h_1 g_0^{k_2} h_2 = g_0^{k_1} g_0^{k_2} h_1 h_2 = g_0^{k_1+k_2} h_1 h_2 = g_0^{k_2+k_1} h_1 h_2 = g_0^{k_2+k_1} h_2 h_1 = g_0^{k_2} g_0^{k_1} h_2 h_1 \\ &= g_0^{k_2} h_2 g_0^{k_1} h_1 = g_2 g_1 \end{aligned}$$
   car h_1 et h_2 sont dans le centre donc ils commutent entre eux et avec g_0.

Problème

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire euclidien usuel et de sa base canonique. Soit $\mathcal{C}$ la conique définie par le polynôme de degré 2 :
$$F(x, y) = yx - 2y - x + 1.$$

Partie I : étude de la nature de $\mathcal{C}$

1. $q((x, y)) = yx$.
2. $S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $\det(S) = -1/4$ donc la matrice possède un unique centre O. Pour trouver ses coordonnées dans la base canonique on peut, par exemple, résoudre le système :
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$
   Ainsi le point O a pour coordonnées, dans la base canonique, $(2, 1)$.
4. On remarque ${}^tS = S$, c'es-à-dire que S est symétrique. De plus ${}^tSS = S^2 = \frac{1}{4} I_2$, donc $2S \in O_2(\mathbb{R})$.
5. La matrice S est symétrique, d'après le cours, elle est diagonalisable.

6. Le polynôme caractéristique de S est $X^2 - \frac{1}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)$. Les valeurs propres de S sont donc $1/2$ et $-1/2$.
Calculons $E(\frac{1}{2}) = \ker(f - \frac{1}{2}id_{\mathbb{R}^2})$:

$$(x,y) \in E\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x - y = 0.$$

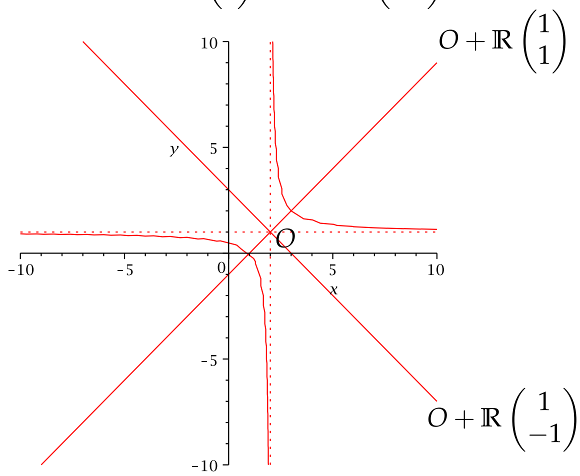
Ainsi, $E(\frac{1}{2}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
Calculons $E(-\frac{1}{2}) = \ker(f + \frac{1}{2}id_{\mathbb{R}^2})$:

$$(x,y) \in E\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Ainsi, $E(-\frac{1}{2}) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. De plus les vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont orthogonaux et forment une base, c'est donc la base orthogonale cherchée. Dans cette base, la matrice S s'écrit : $\begin{pmatrix}1/2 & 0\\0 & -1/2\end{pmatrix}$.

7. Comme $2S \in O_2(\mathbb{R})$ et $\det(2S) = -1$, on en déduit, d'aprés le cours, que $2S$ est la matrice qui représente une symétrie orthogonale par rapport à la droite $E(1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ car si u est vecteur propre de S associé à la valeur propre λ alors u est aussi valeur propre de $2S$ mais associé à la valeur propre 2λ.

8. S possède une valeur propre positive qui est $1/2$ et une valeur propre négative qui est $-1/2$. La signature de q est donc $(1,1)$. D'aprés le cours, la conique $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites.
Or $F(x,y) = (x-2)(y-1) - 1$, la constante étant non-nulle, on en conclut que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.
Enfin les axes de symétries sont les droites $O + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $O + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.



Partie II : étude du groupe des isométries conservant $\mathcal{C}$

1. $s(x,y) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = O + \overrightarrow{s}(x,y)$. Ainsi s est affine et $\overrightarrow{s} = 2S$.

2. $r_O(x,y) = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = O + \overrightarrow{r_O}(x,y)$ où $\overrightarrow{r_O} = -I_2$, r_O est donc une application affine. De plus, $\det(-I_2) = 1$ et ${}^t(-I_2)(-I_2) = I_2$ donc r_0 est une isométrie affine positive. Enfin remarquons que :

$$r_O(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}4 - x = x\\2 - y = y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 2\\y = 1\end{array}\right.$$

Ainsi r_O possède un unique point fixe qui est O, c'est donc une rotation de centre O et d'angle π (car $\cos(\theta) = -1$ et $\sin(\theta) = 0$).

3. $id_{\mathbb{R}^2} \in Is(\mathcal{C})$. De plus si $f, g \in Is(\mathcal{C})$ alors $fg^{-1}(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ car :
$$g(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C} = g^{-1}(\mathcal{C}).$$
Ainsi $fg^{-1} \in Is(\mathcal{C})$ et donc $Is(\mathcal{C})$ est un sous-groupe de $Is(\mathbb{R}^2)$.
4. $s(s(x,y)) = s(1+y, -1+x) = (1+(-1+x), -1+(1+y)) = (x,y)$ et donc $s^2 = id_{\mathbb{R}^2}$.
$r_O(r_O(x,y)) = r_O(4-x, 2-y) = (4-(4-x), 2-(2-y)) = (x,y)$ et donc $r_O^2 = id_{\mathbb{R}^2}$.
$r_O \circ s(x,y) = r_O(1+y, -1+x) = (4-(1+y), 2-(-1+x)) = (3-y, 3-x)$;
$s \circ r_O(x,y) = s(4-x, 2-y) = (1+(2-y), -1+(4-x)) = (3-y, 3-x) = r_O \circ s(x,y)$.
On en déduit que $r_O^{-1} = r_O$ et $s^{-1} = s$. Enfin, pour $(x,y) \in \mathcal{C}$, on a :
$$F(s(x,y)) = F(x,y) = 0;$$
$$F(r_O(x,y)) = F(x,y) = 0;$$
Donc $s(x,y) \in \mathcal{C}$ et $r_O(x,y) \in \mathcal{C}$. On en conclut que $s(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ et $r_O(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Or :
$$s(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C} \subset s^{-1}(\mathcal{C}) = s(\mathcal{C});$$
$$r_O(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C} \subset r_O^{-1}(\mathcal{C}) = r_O(\mathcal{C});$$
c'est-à-dire : $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ et $r_O(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, d'où $s, r_O \in Is(\mathcal{C})$.
5. (a) $f \circ r_O \circ f^{-1}$ est une isométrie affine car c'est une composée d'isométries affines. De plus :
$$\det(\overrightarrow{f \circ r_O \circ f^{-1}}) = \det(\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{r_O} \circ \overrightarrow{f^{-1}}) = \det(\overrightarrow{r_O}) = 1.$$
$f \circ r_O \circ f^{-1}$ est donc une isométrie affine positive. Remarquons que :
$$f \circ r_O \circ f^{-1}(f(O)) = f \circ r_O(O) = f(O).$$
Ainsi, $f \circ r_O \circ f^{-1}$ est une rotation de centre $f(O)$. Enfin pour déterminer l'angle θ de la rotation, il faut remarquer que :
$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = 2\cos(\theta);$$
$$\mathrm{tr}(\overrightarrow{f \circ r_O \circ f^{-1}}) = \mathrm{tr}(\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{r_O} \circ \overrightarrow{f^{-1}}) = \mathrm{tr}(\overrightarrow{r_O}) = \mathrm{tr}(-I_2) = -2.$$
D'oú, $\cos(\theta) = -1$ et donc $\theta = \pi$.
(b) Comme $Is(\mathcal{C})$ est un groupe, alors $f^{-1} \in Is(\mathcal{C})$ et donc :
$$f \circ r_O \circ f^{-1}(\mathcal{C}) = f \circ r_O(\mathcal{C}) = f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}.$$
(c) D'aprés le cours, on sait que O est centre de $\mathcal{C}$ ssi l'homothétie de centre O et de rapport -1 conserve $\mathcal{C}$. Or, d'après les deux questions précédentes, $f \circ r_O \circ f^{-1}$ est une homothétie de centre $f(O)$ et de rapport -1 qui conserve $\mathcal{C}$, $f(O)$ est donc centre de $\mathcal{C}$. Or on a vu à la question 3. que O était l'unique centre de $\mathcal{C}$ donc $f(O) = O$.
Comme f est une isométrie affine et possède un point fixe, d'aprés le cours, on en déduit que c'est une rotation si f est une isométrie affine positive, ou une symétrie orthogonale par rapport à une droite si f est une isométrie affine négative.
(d) La nouvelle origine est $O = (2,1)$, il faut donc poser le changement de variables :
$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 1 \end{cases}$$
Ainsi, $F(x,y) = (Y+1)(X+2) - 2(Y+1) - (X+2) + 1 = YX - 1$.
(e) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - \sin(\theta) \\ \sin(\theta) + \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Alors :
$$F\left(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right) = 0 \Leftrightarrow (\sin(\theta) + \cos(\theta))(\cos(\theta) - \sin(\theta)) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin(\theta) = 0$$
On en déduit que $\theta = 0$ ou π et donc que f est soit l'identité de $\mathbb{R}^2$ soit une rotation de centre O et d'angle π, c'est-à-dire r_O.

(f) $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)+\sin(\theta) \\ \sin(\theta)-\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Alors :

$$F\left(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\right) = 0 \Leftrightarrow (\sin(\theta)-\cos(\theta))(\cos(\theta)+\sin(\theta)) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) = 0$$

On en déduit que $\theta = \pm \dfrac{\pi}{2}$ et donc que f est une symétrie orthogonale par rapport à la droite :

$$O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{pmatrix} = O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou bien par rapport à la droite :

$$O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) \end{pmatrix} = O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

qui est orthogonale à $O + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $f = s$ ou $f = r_O \circ s$.

6. D'aprés la question 4., on a :

$$\langle r_O, s \rangle = \{id_{\mathbb{R}^2}, r_O, s, r_O \circ s\}.$$

D'après la question 5., $Is(\mathcal{C}) = \{id_{\mathbb{R}^2}, r_O, s, r_O \circ s\}$, donc $Is(\mathcal{C}) = \langle r_O, s \rangle$.

7. $Is(\mathcal{C})$ est un groupe à 4 éléments dont chaque élément, hormis le neutre, est d'ordre 2. D'après le TD2 Exercice 8, $Is(\mathcal{C})$ est isomorphe au groupe de Klein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.