Université Le Mirail **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique (MI003AX) **14 janvier 2013**

Examen terminal: Correction

Exercice 1

1. $non(P)$: $\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, y \neq e^x$;
   $non(Q)$: $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R}, y \neq e^x$;
   $non(R)$: $\exists\, x \in \mathbb{Q}, \forall\, q \in \mathbb{Z}, qx \notin \mathbb{Z}$.
2. (P) est fausse car si $y < 0$, comme l'exponentielle est toujours positive, il est impossible qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = e^x$.
   (Q) est fausse car $non(Q)$ est vraie, en effet si $y \in \mathbb{R}^*$, alors $x = \ln(y) + 1$ convient et si $y = 0$ alors $x = 0$ convient.
   (R) est vraie, en effet, si $x \in \mathbb{Q}$, alors il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Aisni, $qx = p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

1. (a) $\boxed{\Rightarrow}$: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$. Comme $A \subset B$ alors $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B$ ou $x \in B$, c'est-à-dire $x \in B$. Ainsi, $A \cup B \subset B$ et comme $B \subset A \cup B$ alors $A \cup B = B$.
   $\boxed{\Leftarrow}$: Soit $x \in A$, comme $A \subset A \cup B$, alors $x \in A \cup B = B$ donc $A \subset B$.
   (b) $A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$ et comme $A \cap B \subset A$, par (a), $A \cup (A \cap B) = A$.
   (c) $\boxed{\Rightarrow}$: $x \in E \setminus A \Leftrightarrow x \in E$ et $x \notin A$. Or $x \in E = A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$. Comme $x \notin A$ alors $x \in B$.
   $\boxed{\Leftarrow}$: Si $x \in E$ alors $x \in A$ ou $x \notin A$. Comme $E \setminus A \subset B$, si $x \notin A$ alors $x \in B$. Ainsi, $x \in E \Rightarrow x \in A$ ou $x \in B$ donc $E \subset A \cup B$. De plus, comme $A \cup B \subset E$, alors $E = A \cup B$.
2. (a) Card $((A \cup B) \cap C) =$ Card $((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$ Card $(A \cap C) +$ Card $(B \cap C) -$ Card $((A \cap C) \cap (B \cap C)) =$ Card $(A \cap C) +$ Card $(B \cap C) -$ Card $(A \cap B \cap C)$.
   (b) Card $(A \cup B \cup C) =$ Card $(A \cup B) +$ Card $(C) -$ Card $((A \cup B) \cap C) =$ Card $(A) +$ Card $(B) -$ Card $(A \cap B) +$ Card $(C) - ($Card $(A \cap C) +$ Card $(B \cap C) -$ Card $(A \cap B \cap C)) =$ Card $(A) +$ Card $(B) +$ Card $(C) -$ Card $(A \cap B) -$ Card $(A \cap C) -$ Card $(B \cap C) +$ Card $(A \cap B \cap C)$.

Exercice 3

1. f est injective car $e^{4x+3} - 5 = e^{4y+3} - 5 \Rightarrow e^{4x+3} = e^{4y+3} \Rightarrow 4x + 3 = 4y + 3 \Rightarrow 4x = 4y \Rightarrow x = y$.
   g est injective car $6x^3 + 7 = 6y^3 + 7 \Rightarrow 6x^3 = 6y^3 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$.
2. f n'est pas surjective, en effet si $y = -5$ et s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -5$ alors $e^{4x+3} = 0$ ce qui est impossible.
   g est surjective car si $y \in \mathbb{R}$, alors pour $x = \sqrt[3]{\frac{y-7}{6}}$, $g(x) = y$.
3. f n'est pas bijective car non-injective et donc f^{-1} n'existe pas.
   g est bijective car injective et surjective. $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-7}{6}}$.
4. $g \circ f(x) = 6(e^{4x+3} - 5) + 7$ et $f \circ g(x) = e^{24x^3+31} - 5$.
5. $e^{4x+3} > 0$ donc $f(x) > -5$. Ainsi $f(\mathbb{R}) =]-5, +\infty[$. Donc $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -5$ et $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ n'existe pas.

Exercice 4

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $f_1(x) = 1$ et $1^n - (1-1)^n = 1$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \geqslant 1$, supposons que la propriété suivante est vraie :

$$(HR) :\ f_n(x) = x^n - (x-1)^n,$$

et montrons que $f_{n+1}(x) = x^{n+1} - (x-1)^{n+1}$.
On sait que $f_{n+1}(x) = (x-1)f_n(x) + x^n$ et par (HR), $f_n(x) = x^n - (x-1)^n$, donc $f_{n+1}(x) = (x-1)(x^n - (x-1)^n) + x^n = x^{n+1} - x^n - (x-1)^{n+1} + x^n = x^{n+1} - (x-1)^{n+1}$.
<u>Conclusion</u> : $\forall n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n - (x-1)^n$.

Exercice 5

1. $U_1^2 = \{[1,1]\}$, $U_2^2 = \{[1,1],[1,2],[2,1]\}$ et $U_3^2 = \{[1,1],[1,2],[1,3],[2,1],[3,1]\}$.
2. Ou bien le premier élément est 1 et on a n choix possibles pour le deuxième, ou bien le deuxième élément est 1 et on a $n-1$ choix possibles pour le premier (car on a déjà compté $[1,1]$). Ainsi, Card $\left(U_n^2\right) = n + n - 1 = 2n - 1 = n^2 - (n-1)^2$.
3. $U_1^3 = \{[1,1,1]\}$ et $U_2^3 = \{[1,1,1],[2,1,1],[1,2,1],[1,1,2],[1,2,2],[2,1,2],[2,2,1]\}$.
4. (a) $A_{n,1} = \{[1, f(2), f(3)] \mid f : \{1,2,3\} \to \{1,\dots,n\},\ (f(2),f(3)) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}\} = \{[1,x,y] \mid (x,y) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}\}$.
   (b) $\varphi((x,y)) = \varphi(x',y')) \Rightarrow [1,x,y] = [1,x',y'] \Rightarrow x = x'$ et $y = y'$. Donc φ est injective.
   Soit $[1,x,y] \in A_{n,1}$, comme $x \in \{1,...,n\}$ et $y \in \{1,...,n\}$, alors par définition, $\varphi((x,y)) = [1,x,y]$ et φ est surjective.
   (c) Comme φ est bijective, Card $(A_{n,1}) =$ Card $(\{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}) = n \times n = n^2$.
   De même, Card $(A_{n,2}) = n^2$ et Card $(A_{n,3}) = n^2$ car un élément de $A_{n,2}$ s'écrit $[x,1,y]$ et un élément de $A_{n,3}$ s'écrit $[x,y,1]$, $(x,y) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$.
5. Un élément de $A_{n,1} \cap A_{n,2}$ s'écrit $[1,1,x]$ avec $x \in \{1,...,n\}$, ainsi, Card $(A_{n,1} \cap A_{n,2}) = n$.
   De même, Card $(A_{n,1} \cap A_{n,3}) =$ Card $(A_{n,2} \cap A_{n,3}) = n$. Enfin, le seul élément de $A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap A_{n,3}$ est $[1,1,1]$, donc Card $(A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap A_{n,3}) = 1$.
6. Card $(U_n^3) =$ Card $(A_{n,1} \cup A_{n,2} \cup A_{n,3}) =$ Card $(A_{n,1}) +$ Card $(A_{n,2}) +$ Card $(A_{n,3}) -$ Card $(A_{n,1} \cap A_{n,2}) -$ Card $(A_{n,1} \cap A_{n,3}) -$ Card $(A_{n,2} \cap A_{n,3}) +$ Card $(A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap A_{n,3}) = 3n^2 - 3n + 1$.
   Or, $n^3 - (n-1)^3 = n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 = 3n^2 - 3n + 1 =$ Card (U_n^3).

Exercice 6

1. Par la formule du binôme de Newton, $\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$.
2. $\mathbb{E} = \sum\limits_{k=0}^{n} k p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Or, $kC_n^k = \frac{n\,!}{(k-1)\,!(n-k)\,!} = nC_{n-1}^{k-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k} &= n \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{K=0}^{n-1} C_{n-1}^{K} p^{K+1} (1-p)^{n-1-K} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} = np\end{aligned}$$

3. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Or, $k^2 C_n^k = k\frac{n\,!}{(k-1)\,!(n-k)\,!} = nkC_{n-1}^{k-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n} kC_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} &= n \sum_{k=0}^{n} (k-1) C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} + n \sum_{k=0}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{K=0}^{n-1} KC_{n-1}^{K} p^{K+1} (1-p)^{n-1-K} + n \sum_{K=0}^{n-1} C_{n-1}^{K} p^{K+1} (1-p)^{n-1-K} \\ &= np((n-1)p) + np,\end{aligned}$$

   où on applique 2. pour la première somme puis 1. pour la deuxième. Enfin,

$$Var = np((n-1)p) + np - (np)^2 = (np)^2 - np^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p).$$