Université Le Mirail **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique (MI003AX) **14 janvier 2013**

Examen terminal

Ce sujet comporte 6 exercices[1]*. Les documents et appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas acceptés. Une attention toute particulière sera accordée à la qualité de la rédaction, toute affirmation devra être argumentée.*

Durée de l'épreuve : 2h.

Exercice 1

On considère les assertions suivantes :

$$
\begin{aligned}
(P) &: \ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = e^x;\\
(Q) &: \ \exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ y = e^x;\\
(R) &: \ \forall\, x \in \mathbb{Q},\ \exists\, q \in \mathbb{Z},\ qx \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

1. Écrire les négations de (P), (Q) et (R).
2. En justifiant vos réponses, dire si (P), (Q) et (R) sont vraies ou fausses.

Exercice 2

1. Soient A, B deux parties d'un ensemble E. Montrer que :
   (a) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
   (b) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$.
   (c) $A \cup B = E \Leftrightarrow E \setminus A \subset B$.
2. Soient A, B et C trois parties finies d'un ensemble E.
   (a) Exprimer le cardinal de $(A \cup B) \cap C$ en fonction des cardinaux de $A \cap C, B \cap C$ et $A \cap B \cap C$.
   (b) En déduire que le cardinal de la réunion $A \cup B \cup C$ est égal à :

$$\mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) + \mathrm{Card}\,(C) - \mathrm{Card}\,(A \cap B) - \mathrm{Card}\,(A \cap C) - \mathrm{Card}\,(B \cap C) + \mathrm{Card}\,(A \cap B \cap C).$$

Exercice 3

Considérons les applications suivantes :

$$
f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{4x+3} - 5 \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 6x^3 + 7 \end{array}
$$

1. f et g sont-elles injectives ?
2. f et g sont-elles surjectives ?
3. f et g sont-elles bijectives ? Si oui, calculer f^{-1} ou g^{-1}.
4. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.
5. Calculer $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Est-ce que $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ existe ?

1. N'oubliez pas de tourner la page !

Exercice 4

On pose $f_1(x) = 1$ et pour $n \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) = (x-1)f_n(x) + x^n$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 1,\ f_n(x) = x^n - (x-1)^n.$$

Exercice 5

Pour tout couple d'entiers strictement positifs (n,k), on considère l'ensemble des applications de $\{1,\dots,k\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui prennent la valeur 1 :

$$U_n^k = \{f : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,n\} \mid 1 \in f(\{1,\dots,k\})\}.$$

Un élément $f \in U_n^k$ sera noté $[f(1),\cdots,f(k)]$. Par exemple l'application identité de $\{1,2,3\}$ (qui est un élément de U_3^3) est notée $[1,2,3]$ et pour $k=4$, l'application constante 1, en tant qu'élément de U_n^4, est notée $[1,1,1,1]$ (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$).

1. Déterminer U_1^2, U_2^2 et U_3^2.
2. Quel est le cardinal de U_n^2 pour $n \in \mathbb{N}^*$?
3. Déterminer U_1^3 et U_2^3.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in \{1,2,3\}$ on pose :

$$A_{n,i} = \{f : \{1,2,3\} \to \{1,\dots,n\} \mid f(i) = 1\}.$$

   (a) Montrer que $A_{n,1} = \{[1,x,y] \mid (x,y) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}\}$.

   (b) Considérons l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} & \to & A_{n,1} \\ & (x,y) & \mapsto & [1,x,y] \end{array}$$

   Montrer que φ est bijective.

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Card $(A_{n,1}) = n^2$. Qu'en est-il de Card $(A_{n,2})$ et Card $(A_{n,3})$?

5. Déterminer les cardinaux de $A_{n,1} \cap A_{n,2}$, $A_{n,1} \cap A_{n,3}$, $A_{n,2} \cap A_{n,3}$ et $A_{n,1} \cap A_{n,2} \cap A_{n,3}$.
6. Déduire des questions précdentes et de l'exercice 2 que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{Card}\,(U_n^3) = n^3 - (n-1)^3.$$

Exercice 6

En théorie des probabilités, on définit la loi binomiale de paramètres $n \geqslant 0$ et $p \in [0,1]$ en posant, pour tout $k \in \{0,...,n\}$:

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.
2. On appelle moyenne de la loi binomiale la somme $\mathbb{E} = \sum_{k=0}^{n} kp_k$. Montrer que $\mathbb{E} = np$.
3. On appelle variance de la loi binomiale la différence $Var = \sum_{k=0}^{n} k^2 p_k - \mathbb{E}^2$. Montrer que $Var = np(1-p)$.