L3 MF — Algèbre
2010-11
Examen final, 5 janvier 2011
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction ! Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Action de $PSL(2,\mathbb{Z})$ sur le demi-plan. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive, $SL(2,\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels dont le déterminant est 1, et $SL(2,\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $SL(2,\mathbb{R})$ composé des matrices à coefficients entiers.

1. Montrer que $SL(2,\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{R})$.

2. Pour toute matrice $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$ et tout $z \in \mathcal{H}$ on note

$$u.z = \frac{az+b}{cz+d}\ .$$

Montrer que ceci définit une action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$.

3. Montrer qu'il existe une unique matrice de $SL(2,\mathbb{R})$ autre que I_2 qui agit trivialement sur $\mathcal{H}$.

4. Montrer que le $\{I_2, -I_2\}$ est un sous-groupe distingué de $SL(2,\mathbb{R})$. En déduire que le groupe $PSL(2,\mathbb{R})$ défini comme le quotient $SL(2,\mathbb{R})/\{-I_2, I_2\}$ admet une action sur $\mathcal{H}$ pour laquelle aucun élément de $PSL(2,\mathbb{R})$ n'agit de manière triviale.

5. Soit $u \in SL(2,\mathbb{Z})$, et soit $z \in \mathcal{H}$ un point fixe de u pour l'action de $SL(2,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$. Montrer que la trace de u est soit -1, soit 0, soit 1.

6. En déduire que si u a un point fixe dans $\mathcal{H}$ alors $u^6 = I_2$. (*Indication :* on pourra utiliser le polynôme caractéristique de u.)

7. On choisit maintenant un nombre premier $p \geq 3$, et on appelle Γ_p l'ensemble des matrices $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{Z})$ telles que a et d sont congrus à 1 modulo p et que b et c sont congrus à 0 modulo p.

Montrer que Γ_p est un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ et qu'aucun élément non trivial de Γ_p n'a de point fixe dans $\mathcal{H}$.

8. Montrer que Γ_p est distingué et d'indice fini dans $SL(2,\mathbb{Z})$.

2. Exercice. Soit A un anneau intègre dans lequel toute suite décroissante d'idéaux est stationnaire. Montrer que A est un corps. (*Indication :* étant donné un élément $a \in A$ non nul, on pourra considérer la suite des (a^n).)

3. Exercice. Montrer que le polynôme $7X^5+15X^2+35$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

4. Polynômes premiers de $\mathbb{Z}[X]$. 1. Soit A un anneau, soit J un idéal premier de A, et soit B un sous-anneau de A. Montrer que $B \cap J$ est soit un idéal premier de B, soit B lui-même.

2. Soit maintenant J un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que $J \cap \mathbb{Z}$ est soit (0) soit (p) où p est un nombre premier.

3. On suppose que $J \cap \mathbb{Z} = (0)$. Montrer que J est engendré par un polynôme de J de degré minimal, dont le pgcd des coefficients est 1.

4. On suppose maintenant que $J \cap \mathbb{Z} = (p)$, où p est premier. On note $r_p : \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ la réduction modulo p. Montrer que $r_p(J)$ est un idéal premier de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$. En déduire que $J = (p, g)$, où g est un polynôme tel que $r_p(g)$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.