Université Paul Sabatier **Toulouse**
L2 Mathématiques: groupes et géométrie **16 mai 2012**

Examen terminal

Ce sujet comporte un exercice et un problème. Les documents et appareils électroniques de toutes sortes ne sont pas acceptés. Une attention toute particulière sera accordée à la qualité de la rédaction, toute affirmation devra être argumentée.

Exercice

Soit $(G, .)$ un groupe, on rappelle que le *centre* de G est l'ensemble :

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall\, h \in G,\, gh = hg\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $Z(G)$ est distingué dans G.
3. On suppose que $G/Z(G)$ est un groupe cyclique, c'est-à-dire qu'il existe $g_0 \in G$ tel que $G/Z(G) = \langle \overline{g_0} \rangle$.
   (a) Montrer que pour tout $g \in G$, il existe $h \in Z(G)$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $g = g_0^k h$.
   (b) En déduire que G est un groupe commutatif.

Problème

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire euclidien usuel et de sa base canonique. Soit $\mathcal{C}$ la conique définie par le polynôme de degré 2 :

$$F(x, y) = yx - 2y - x + 1.$$

Partie I : étude de la nature de $\mathcal{C}$

1. Quelle est la forme quadratique associée à F ? On notera cette forme quadratique q.
2. Donner la matrice associée à q dans la base canonique, c'est-à-dire telle que :

   $$q(x, y) = (x\ y)\ S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   On notera cette matrice S.
3. La conique $\mathcal{C}$ possède-t-elle un centre ? Si oui, donner ses coordonnées dans la base canonique. On notera O le centre de la conique.
4. Montrer que la matrice $2S$ est orthogonale.
5. Sans calculs, expliquer pourquoi la matrice S est diagonalisable.
6. Donner les valeurs propres de S, les espaces propres associées aux valeurs propres et une base orthogonale pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle S est diagonale.
7. Quelle transformation géométrique représente la matrice $2S$? (si c'est une rotation donner l'angle, si c'est une réflexion donner la droite fixe).
8. Quelle est la signature de q ? quel est le type de la conique ? Quels sont ses axes de symétrie ?

Partie II : étude du groupe des isométries conservant $\mathcal{C}$

1. Considérons l'application :

   $$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (1 + y, -1 + x) \end{aligned}$$

   Montrer que s est une application affine telle que la matrice de $\overrightarrow{s}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ soit $2S$.

2. Considérons l'application :

$$r_O : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (4 - x, 2 - y)$$

Montrer que r_O est une isométrie affine positive. Déterminer sa nature (si c'est une translation donner son vecteur, si c'est une rotation donner son centre et son angle).

3. Montrer que $Is(\mathcal{C}) = \{f \in Is(\mathbb{R}^2) \mid f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}$ est un sous-groupe de $Is(\mathbb{R}^2)$ pour la composition des fonctions.
4. Montrer que $s \in Is(\mathcal{C})$, $r_O \in Is(\mathcal{C})$, $s^2 = id_{\mathbb{R}^2}$, $r_O^2 = id_{\mathbb{R}^2}$ et $r_O \circ s = s \circ r_O$.
5. Soit $f \in Is(\mathcal{C})$.
   (a) Montrer que $f \circ r_O \circ f^{-1}$ est une rotation de centre $f(O)$ et d'angle π, c'est-à-dire une homothétie de centre $f(0)$ et de rapport -1.
   (b) Montrer que $f \circ r_O \circ f^{-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
   (c) En déduire que $f(O) = O$ et que f est soit une rotation soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
   (d) Prenons O comme nouvelle origine de $\mathbb{R}^2$ vu en tant que plan affine et gardons la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vu en tant que plan vectoriel. Montrer que l'équation de $\mathcal{C}$ est alors $xy - 1 = 0$.
   (e) Si $f \in Is(\mathcal{C}) \cap Is^+(\mathbb{R}^2)$ on sait que la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base canonique est de la forme :

   $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   Déterminer θ. (*Indication* : dans le nouveau repère, le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, 1)$ est dans $\mathcal{C}$, le vecteur $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ doit donc vérifier l'équation $xy - 1 = 0$.)
   En déduire que $f = id_{\mathbb{R}^2}$ ou $f = r_O$.
   (f) Si $f \in Is(\mathcal{C}) \cap Is^-(\mathbb{R}^2)$ on sait que la matrice de $\overrightarrow{f}$ dans la base canonique est de la forme :

   $$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   et que l'axe de symétrie est dirigé par le vecteur $\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.
   Déterminer θ en suivant la même méthode que la question précédente. En déduire que $f = s$ ou $f = r_O \circ s$.
6. En déduire que $Is(\mathcal{C}) = \langle r_O, s \rangle$.
7. Montrer que $Is(\mathcal{C}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.