UPS. L3 Mathématiques Fondamentales. Algèbre. Devoir. 2010/2011

I. Rappel du cours : produit direct et semi-direct

Définition 1. On dit que G est le produit direct de deux sous-groupes A et B (on écrit dans ce cas là $G = A \times B$ où $G = A \oplus B$) si :

(1) $AB = G$;
(2) $A \cap B = \{e\}$;
(3) $ab = ba$ quels que soient $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 1. Un professeur a posé en TD une question sur le groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Une étudiante lui a dit qu'elle ne comprend pas du tout de quoi il s'agit, car elle connait bien la définition du produit direct de A et B, et dans cette définition on a $A \cap B = \{e\}$ tandis que $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Que répondriez-vous à cette étudiante ?

Définition 2. On dit que G et le produit semi-direct d'un sous-groupe distingué A par un sous-groupe B si

(1) $AB = G$;
(2) $A \cap B = \{e\}$.

Dans ce cas là, on écrit $G = A \rtimes B$, $G = A \rtimes_f B$ ou $G = A \times_f B$ où on note $f : B \to \mathrm{Aut}(A)$ l'homomorphisme $b \mapsto (a \mapsto bab^{-1})$.

Exercice 2. a.) Soit $G = A \rtimes B$. Montrer que $B \cong G/A$. Montrer que la réciproque n'est pas vrai, c.-à-d., donner un exemple d'un groupe G et d'un sous-groupe distingué A de G tels que $G \ncong A \rtimes (G/A)$.

b). Montrer que $A \rtimes_f B$ est déterminé par A, B et f à isomorphisme près.

c). Etant donnés deux groupes quelconques A, B, et un homomorphisme $f : B \to \mathrm{Aut}(A)$, donner la construction de $A \rtimes_f B$.

d). Poser la question analogue à celle de l'exercice 1 et donner la réponse.

Exercice 3. On note D_n le *groupe diédral* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes_f (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où $f : \mathbb{Z}/2Z \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est donné par $b \mapsto (a \mapsto a^{-1})$; ici b est le seul élément non-trivial du deuxième facteur; a un élément arbitraire du premier facteur.

Montrer que D_n est isomorphe au groupe des isometries du polygone régulier à n côtés.

Exercice 4. a). Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ – le groupe d'élément inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En déduire, que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ si p est premier et que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

b). Soient p et q deux nombres premier, $p \neq q$. Soit $G = A \rtimes B$ où $|A| = p$, $|B| = q$. Montrer que, si q ne divise pas $p - 1$, alors $G = A \times B \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

c). Montrer que $\mathrm{Aut}\big((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\big) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

II. Classification de groupes de petit ordre.

Exercice 5. a). Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique, alors G est abélien (on note $Z(G)$ le centre de G).

b). Soit G un groupe d'ordre p^n (p premier). Montrer que $Z(G)$ est non-trivial. *Indication : Montrer que la taille de toute classe de conjugaison divise l'ordre du groupe.*

c). Montrer que tout groupe d'ordre p^2 (p premier) est abélien.

Exercice 6. Soit p et q deux nombres premiers, $p > q$, et G un groupe d'ordre pq. L'objectif est de montrer que $G \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

a). Montrer qu'il existent éléments a et b de G d'ordres p et q respectivement. On note A et B les sous-groupes de G engendrés par a et b.

b). Montrer que l'intersection de deux sous-groupes de G d'ordre p est trivial

c). Montrer que l'un des groupes A et B est distingué. En déduire que $G = A \rtimes B$ ou $B \rtimes A$. *Indication. En supposant, que A n'est pas distingué, considérer l'action de B sur l'ensemble des sous-groupes conjugués à A et montrer que la réunion $\mathcal{A}$ de tous ces sous-groupe contient $1 + (p-1)q$ éléments. En déduire que $G = \mathcal{A} \cup B$.*

d). Conclure. *Indication : Utiliser l'exercice 4b).*

Exercice 7. Soit G un groupe non-abélien d'ordre 6. Montrer que $G \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_3$ (on note S_n le groupe symétrique).

Exercice 8. Soit G un groupe fini tel que $x^2 = e$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Exercice 9. a). Soit G un groupe non-abélien d'ordre 8. Montrer que G est isomorphe soit à D_4, soit au groupe quaternionique $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, muni de la loi de composition $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, et $(\pm x)(\pm y) = \pm(xy)$ avec le choix de signe habituel.

Indication : Montrer qu'il existe un sous-groupe cyclique A d'ordre 4. Montrer qu'il est distingué. Soit $b \notin A$. Etudier toutes possibilités pour b^2.

b). Montrer que Q n'est pas un produit direct de deux sous-groupes propres.

Exercice 10. Soit G un groupe non-abélien d'ordre 12.

a). Montrer que G est isomorphe à l'un des groupes suivant :

$$D_6, \qquad \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, \qquad \left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right) \rtimes \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \tag{1}$$

b). Lequel groupe de la liste (1) est isomorphe au groupe alterné A_4 ? Au groupe $S_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

Exercice 11. Donner la liste de tous les groupes d'ordre ≤ 15 à isomorphisme près.

III. Groupes d'isometries de polyèdres réguliers.

Exercice 12. Soit P un polyèdre régulier. On note $I(P)$ le groupe de toutes isometries de P et $I^+(P)$ les isometries directes.

Montrer que l'ordre de $I(P)$ et de $I^+(P)$ est égal à $4n$ et $2n$ respectivement où n est le nombre d'arêtes de P. En deduire l'ordre de ces groupes pour tous les polyèdres réguliers.

Exercice 13. Soit P un tetraèdre régulier. Montrer que $I(P) \cong S_4$ et $I^+(P) \cong A_4$.

Exercice 14. Soit P un cube ou un octaèdre régulier. Montrer que $I^+(P) \cong S_4$ et $I(P) \cong S_4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Indication : Considérer l'action de ces groupes sur l'ensemble des diagonales.

Exercice 15. Soit P un dodécaèdre ou icosaèdre régulier. Montrer que $I^+(P) \cong A_5$ et $I^+(P) \cong A_5 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Indication : Considérer l'action de ces groupes sur les cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre (dont les sommets sont choisis parmi ceux du dodécaèdre).