Cours L2 Algèbre et Géométrie

SAN SATURNINO Jean-Christophe

30 avril 2012

Table des matières

Introduction

Ce document est un résumé du cours que j'ai donné en L2 Mathématiques pour le module optionnel Mathématiques approfondies du deuxième semestre pendant l'année universitaire 2011-2012.

Le programme du module comportait deux parties bien distinctes : algèbre et géométrie. La première était une introduction à la théorie des groupes (définitions de base, sous-groupes distingués, groupes quotients, théorème d'isomorphisme), la deuxième était une introduction à la géomérie affine du plan (objets, morphismes, isométries, coniques).

Mon but principal lors de la rédactions de ce cours a été de faire un lien constant entre les groupes et la géométrie, ceci justifiant le choix de présenter le produit semi-direct en L2. D'autres choix personnels ont été fait pour essayer de s'adapter au mieux au programme proposé et à mes goûts personnels, je ne prétends pas proposer un cours parfait mais simplement le minimum à connaître lorsque on veut parler de géométrie en L2 avec des outils diférents de ceux du lycée.

Les feuilles de TD viennent compléter le cours, elles sont accessibles sur ma page personnelle. Les preuves des énoncés ne sont pas proposées, elles sont faciles et classiques, on peut les trouver facilement dans les réfŕences données à la fin.

Enfin, je m'excuse par avance des diiférentes coquilles et erreurs, si vous en trouvez, n'hésitez pas à me le faire savoir !

Chapitre 1

Algèbre

1.1 Groupes, sous-groupes, morphismes

1.1.1 Groupes et sous-groupes

***Définition* 1.1.1.1.** *Un **groupe** $(G, *)$ est la donnée d'un ensemble G et d'une application :*

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

*appelée **opération** ou **loi de composition interne** tels que :*

1. *$\exists\, e \in G,\ \forall\, x \in G,\ e * x = x * e = x$.*
   *e est appelé l'élément **neutre** de G.*
2. *$\forall\, x \in G,\ \exists\, y \in G,\ x * y = y * x = e$.*
   *y est appelé **l'inverse** (ou **l'opposé**) de x, on le note x^{-1} (ou$-x$).*
3. *$\forall\, x, y, z \in G,\ x * (y * z) = (x * y) * z$.*
   *On dit que l'opération est **associative**.*

Remarque 1.1.1.2. $G \neq \emptyset$ car $e \in G$.

Exemples : $\{e\}$, $(\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes.

***Définition* 1.1.1.3.** *Soit $(G, *)$ un groupe. On dit qu'il est **commutatif** (ou **abélien**) si :*

$$\forall\, x, y \in G,\ x * y = y * x.$$

***Définition* 1.1.1.4.** *Soit $(G, *)$ un groupe. **L'ordre** de G, noté $|G|$, est le cardinal de l'ensemble G.*
*Un groupe est dit **fini** si son ordre est fini.*

***Définition* 1.1.1.5.** *Soit $(G, *)$ un groupe. On dit que H est un **sous-groupe** de G si :*

1. H est un sous-ensemble de G ;

2. H muni de l'opération de G est un groupe.

On note alors $H < G$.

***Proposition* 1.1.1.6.** *Soient $(G, *)$ un groupe et H un sous-ensemble non-vide de G. Il y a équivalence entre :*

1. H est un sous-groupe de G ;

2. $\forall\, x, y \in H,\ x * y \in H$ et $\forall\, x \in H,\ x^{-1} \in H$;

3. $\forall\, x, y \in H,\ x * y^{-1} \in H$.

Exemples : $(\mathbb{Q}, +) < (\mathbb{R}, +) < (\mathbb{C}, +)$, $SL_n(\mathbb{K}) < GL_n(\mathbb{K})$, $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.

***Proposition* 1.1.1.7.** *Soient G un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.*

***Proposition-définition* 1.1.1.8.** *Soient $(H, *_H)$ et $(K, *_K)$ deux groupes, on définit sur $H \times K$ une opération, notée $*$, comme suit :*

$$(h, k) * (h', k') = (h *_H h', k *_K k').$$

*Alors, $(H \times K, *)$ est un groupe appelé **produit** de H et K.*

1.1.2 Morphismes

***Définition* 1.1.2.1.** *Soient $(G, *)$ et $(H, .\,)$ deux groupes. Un **homomorphisme** (ou **morphisme**) de groupe est une application $f : G \to H$ vérifiant :*

$$\forall\, x, y \in G,\ f(x * y) = f(x).f(y).$$

On note $Hom(G, H)$ l'ensemble des morphismes de G dans H.

***Proposition* 1.1.2.2.** *Soient G et H deux groupes et $f \in Hom(G, H)$, alors :*

1. $f(e_G) = e_H$.

2. $\forall\, x \in G,\ (f(x))^{-1} = f\left(x^{-1}\right)$.

***Proposition-définition* 1.1.2.3.** *Soient G et H deux groupes et $f \in Hom(G, H)$.*

*1. On appelle **noyau de f** l'ensemble :*

$$Ker f = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}.$$

C'est un sous-groupe de G.

*2. On appelle **image de f** l'ensemble :*

$$Im f = f(G) = \{f(x) \mid x \in G\}.$$

C'est un sous-groupe de H.

***Définition* 1.1.2.4.** *Soient G et H deux groupes et $f \in Hom(G,H)$.*

1. *On dit que f est un **monomorphisme** si f est un morphisme injectif.*
2. *On dit que f est un **épimorphisme** si f est un morphisme surjectif.*
3. *On dit que f est un **isomorphisme** si f est un morphisme bijectif.*
4. *Si $f \in Hom(G,G)$, on dit que f est un endomorphisme. On note : $End(G) = Hom(G,G)$ l'ensemble des endomorphismes de G.*
5. *On dit que f est un **automorphisme** de G si $f \in End(G)$ et si f est un isomorphisme. On note $Aut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.*

***Proposition* 1.1.2.5.** *Soient G et H deux groupes et $f \in Hom(G,H)$.*

$$f \text{ est un monomorphisme ssi } Ker f = \{e_G\}.$$

***Définition* 1.1.2.6.** *Soent G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est un sous-groupe **caractéristique** de G si :*

$$\forall\, f \in Aut(G),\ f(H) = H.$$

***Proposition* 1.1.2.7.** *Soient G un groupe et $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes caractéristiques de G. Alors $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe caractéristique de G.*

1.1.3 Parties génératrices

***Proposition-définition* 1.1.3.1.** *Soient G un groupe et A une partie non-vide de G.*

1. *On note $\langle A\rangle = \bigcap\limits_{\substack{H<G \\ A\subset H}} H$.*
   *C'est le plus petit sous-groupe de G contenant A. On l'appelle le **sous-groupe engendré par A**.*
2. *Lorsque $G = \langle A\rangle$, on dit que A est un **système de générateurs** de G (ou que G est **engendré** par A, ou A **engendre** G).*

***Proposition* 1.1.3.2.** *Soient G un groupe et A une partie non-vide de G. Alors :*

$$\langle A\rangle = \{x_1 ... x_k \mid k \in \mathbb{N}^*, x_1 \in A \cup A^{-1}, ..., x_k \in A \cup A^{-1}\},$$

où $A^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in A\}$.

***Corollaire* 1.1.3.3.** *Soit G un groupe. Alors :*

$$\forall\, x \in G,\ \langle\{x\}\rangle = \{x^m \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

***Définition* 1.1.3.4.** *Soit G un groupe.*

1. *On dit que G est* ***monogène*** *si il existe $x \in G$ tel que $G\langle\{x\}\rangle$ et on note $G = \langle x\rangle$.*
2. *On dit que G est* ***cyclique*** *s'il est monogène fini.*

Définition* 1.1.3.5.** *Soient G un groupe et $x \in G$.* ***L'ordre d'un élément *x, noté $o(x)$, est :*

$$o(x) = |\langle x\rangle|.$$

Exemples : $\mathbb{Z} = \langle 1\rangle$.

1.2 Quotient de groupes, théorème de Lagrange, sous-groupes distingués

1.2.1 Relation d'équivalence

Définition* 1.2.1.1.** *Soit E un ensemble, on définit une* ***relation d'équivalence*, notée $\sim$, comme étant une relation binaire vérifiant :*

1. *$\forall\, x \in E$, $x \sim x$ (réflexivité) ;*
2. *$\forall\, x, y \in E$, $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ (symétrie) ;*
3. *$\forall\, x, y, z \in E$, $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (transitivité).*

Exemples : $=$ dans $\mathbb{R}$, $\equiv$ dans $\mathbb{Z}$, pour $f \in Hom(G, H)$ on peut définir $x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

Définition* 1.2.1.2.** *Soient E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Pour $x \in E$, on appelle* ***classe d'équivalence de x*, notée C_x (ou $\overline{x}$), l'ensemble :*

$$C_x = \overline{x} = \{y \in E \mid x \sim y\}.$$

On note $E/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence et on l'appelle ***l'ensemble quotient*** *:*

$$E/\sim = \{\overline{x} \mid x \in E\}.$$

Remarque 1.2.1.3. $C_x \neq \emptyset$ car $x \in C_x$.

***Proposition* 1.2.1.4.** *L'ensemble des classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble :*

$$E = \coprod_{C_x \in E/\sim} C_x.$$

Si E est un ensemble fini, on a :

$$\sharp\,(E) = \sum_{C_x \in E/\sim} \sharp\,(C_x).$$

***Proposition-définition* 1.2.1.5.** *Considérons l'application :*

$$\begin{aligned} \pi : E &\to E/\sim \\ x &\mapsto \overline{x} \end{aligned}$$

*C'est une application surjective appelée **application de passage au quotient** (ou **application quotient**).*

Exemple : dans $\mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y\ [2]$, alors : $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0},\ \overline{1}\}$, on note $\mathbb{Z}/\sim = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

***Proposition* 1.2.1.6.** *Soient E, F deux ensembles et $\sim$ une relation d'équivalence sur E.*
Soit $f : E \to F$ une application constante sur les classes d'équivalence. Alors :

$$\exists\,!\,\overline{f} : E/\sim \to F \text{ telle que } \overline{f} \circ \pi = f.$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\circlearrowleft"] & F \\ E/\sim \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

*On dit que **le diagramme commute**. De plus, on a :*

$$Im\overline{f} = Imf.$$

***Corollaire* 1.2.1.7.**

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \\ E/\sim \arrow[r, "\overline{f}"'] & Imf \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

De plus, $\overline{f}$ est injective ssi $\sim = \sim_f$.

***Définition* 1.2.1.8.** *On dit que **f se factorise** en $\overline{f}$.*

1.2.2 Théorème de Lagrange

***Proposition-définition* 1.2.2.1.** *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.*

1. *On définit une relation d'équivalence sur G par :*

$$\forall\, x, y \in G,\ x \sim_H y \Leftrightarrow \exists\, h \in H,\ x = yh \Leftrightarrow y^{-1}x \in H.$$

*On note $yH = \{yh \,|\, h \in H\}$ la classe d'équivalence de y et on l'appelle **classe à gauche**. On note $G/H = G/\sim_H$.*

2. On définit une relation d'équivalence sur G par :

$$\forall\, x, y \in G,\ x_H \sim y \Leftrightarrow \exists\, h \in H,\ x = hy \Leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

*On note $Hy = \{hy \,|\, h \in H\}$ la classe d'équivalence de y et on l'appelle **classe à droite**. On note $G//H = G/_H \sim$.*

Remarque 1.2.2.2. si G est commutatif, alors $\sim_H = {}_H \sim$.

***Proposition-définition* 1.2.2.3.** *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Alors :*

$$\sharp\,(G/H) = \sharp\,(G//H).$$

*On note ce cardinal commun $[G : H]$ et on l'appelle **l'indice de** H **dans** G.*

Théorème* 1.2.2.4. *(de Lagrange) *Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Alors :*

$$|G| = [G : H]\,|H|.$$

***Corollaire* 1.2.2.5.** *Dans un groupe fini, l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe. En particulier, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.*

1.2.3 Sous-groupes distingués et groupe quotient

On cherhce à définir une structure de groupe sur G/H, pour cela, il faut que la structure de groupe de G soit compatible avec la relation d'équivalence. Si tel est le cas, il nous suffit de définir l'opération sur G/H par :

$$\overline{x}\,\overline{y} := \overline{xy}.$$

Ceci nous donne automatiquement le neutre qui est $\overline{e}$ et l'inverse de $\overline{x}$ qui est $\overline{x^{-1}}$.
Mais pour que la structure de groupe de G soit compatible avec la relation d'équivalence il faut et il suffit que les classes à gauche soient égales aux classes à droite. On doit donc définir la notion suivante :

***Définition* 1.2.3.1.** *Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est un sous-groupe **distingué** (ou **normal**) si :*

$$\forall\, x \in G,\ xH = Hx.$$

On note alors $H \lhd G$.

Exemple : Dans un groupe commutatif, tout sous-groupe est distingué.

***Proposition* 1.2.3.2.** *Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Il y a équivalence entre :*

1. $H \lhd G$ *;*
2. $\forall\, g \in G,\ gHg^{-1} = H$ *;*
3. $\forall\, h \in H,\ \forall\, g \in G,\ ghg^{-1} \in H$.

***Proposition* 1.2.3.3.** *Soient* $(G, *)$ *un groupe et* $H \lhd G$*, alors* G/H *est un groupe pour l'opération* $*_{G/H}$ *définie par :*

$$\overline{x} *_{G/H} \overline{y} = \overline{x * y}.$$

De plus, $\pi : G \to G/H$ *est un épimorphisme.*

Exemple :$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe.

1.2.4 Théorème d'isomorphisme

***Proposition* 1.2.4.1.** *Soient* G, G' *deux groupes,* $f \in Hom(G, G')$*, alors :*

$$Ker f \lhd G.$$

Réciproquement, si $H \lhd G$*, alors il existe* $f \in Hom(G, G/H)$ *tel que :*

$$Ker f = H.$$

Théorème* 1.2.4.2. *(d'isomorphisme) *Soit* $f : G \to H$ *un morphisme de groupes. Alors :*

$$G/Ker f \simeq Im f.$$

Plus précisément, il existe un unique morphisme de groupe injectif $\overline{f} : G/Ker f \to H$ *tel que* $f \circ \pi = \overline{f}$*. On a donc le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\
G/Ker f \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"] & Im f \arrow[u, hook, "i"']
\end{tikzcd}$$

***Corollaire* 1.2.4.3.** *Soit* $f : G \to H$ *un morphisme de groupe surjectif, alors :*

$$G/Ker f \simeq H.$$

Plus précisément, il existe un unique isomorphisme $\overline{f} : G/Ker f \to H$ *tel que* $f \circ \pi = \overline{f}$*. On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \\
G/Ker f \arrow[ur, dotted, "\sim", "\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

Exemple : Un groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1.3 Le groupe symétrique

1.3.1 Permutations, cycles

Définition* 1.3.1.1.** *Soit E un ensemble. On appelle* ***permutation *de E une bijection de E dans E. On note $\mathfrak{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E, c'est un groupe.*
Si $E = \{1, ..., n\}$, on note $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(\{1, ..., n\})$ et on l'appelle le ***groupe symétrique de degré n****.*

***Lemme* 1.3.1.2.** $\forall\, n \geqslant 1$, $|\mathfrak{S}_n| = n\,!$.

Notation : Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

***Définition* 1.3.1.3.** *Soit $n \geqslant 1$.*

1. *On appelle* ***support*** *de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ l'ensemble :*

$$supp\, \sigma = \{k \in \{1, ..., n\} \mid \sigma(k) \neq k\}.$$

2. *On appelle* ***cycle*** *une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle qu'il existe $\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., n\}$ tels que :*

$$\sigma(i_1) = i_2,\ \sigma(i_2) = i_3,\ ...,\ \sigma(i_k) = i_1;$$

$$\sigma(i) = i,\ \forall\, i \notin \{i_1, ..., i_k\}.$$

On a donc $supp\, \sigma = \{i_1, ..., i_k\}$. On note alors :

$$(i_1 \curvearrowright i_2 \curvearrowright \dots \curvearrowright i_k)$$

3. *On appelle* ***longueur d'un cycle*** *le cardinal du support du cycle. Pour un cycle $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $|\sigma|$ la longueur du cycle σ.*
4. *Deux cycles sont dits* ***disjoints*** *si leurs supports sont disjoints. On remarque que deux cycles disjoints commutent.*
5. *Un cycle de longueur k est appelé un* ***k-cycle****. Un 2-cycle est appelé une* ***transposition****.*

***Proposition* 1.3.1.4.** *Tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose de manière unique en un produit $\sigma = \gamma_1 ... \gamma_l$ où les γ_i sont des cycles à supports disjoints.*

***Proposition* 1.3.1.5.** *$\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.*

1.3.2 Signature, groupe alterné

***Proposition-définition* 1.3.2.1.** *Il existe un unique morphisme surjectif $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\}$ appelé **signature**.*

Remarque 1.3.2.2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma = \gamma_1 ... \gamma_l$ son unique décomposition en cycles à supports disjoints, alors :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{l} (|\gamma_i|+1)}.$$

En particulier, si τ est une transposition, on a bien $\varepsilon(\tau) = -1$.

***Définition* 1.3.2.3.** *Le noyau de ε est appelé le **groupe alterné de degré n** (ou **groupe des permutations paires**). On le note $\mathfrak{A}_n$.*

$$\mathfrak{A}_n = Ker\, \varepsilon = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$$

*Si $\sigma \notin \mathfrak{A}_n$, on dit que σ est une permutation **impaire**.*

***Proposition* 1.3.2.4.** $|\mathfrak{A}_n| = \dfrac{n\,!}{2}$ *et c'est le seul sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice 2.*

1.4 Produit semi-direct

***Proposition-définition* 1.4.0.5.** *Soient H, K deux groupes et :*

$$\begin{aligned} \alpha : K &\to Aut(H) \\ k &\mapsto \alpha_k \end{aligned}$$

un morphisme de groupe. On définit sur $H \times K$ une opération, notée $*_\alpha$, comme suit :

$$(h, k) *_\alpha (h', k') = (h\alpha_k(h'), kk').$$

*Alors, $(H \times K, *_\alpha)$ est un groupe appelé **produit semi-direct** de H par K et noté $H \rtimes_\alpha K$.*

***Proposition* 1.4.0.6.** *Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G tels que :*

$$H \lhd G,\ H \cap K = \{e\},\ G = HK.$$

Alors, $G \simeq H \rtimes_\varphi K$, où :

$$\begin{aligned} \varphi : K &\to Aut(H) \\ k &\mapsto \big(h \mapsto khk^{-1}\big) \end{aligned}$$

Exemple : $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Chapitre 2

Géométrie

2.1 Plan affine, sous-espaces affines

2.1.1 Le plan affine euclidien, repères cartésiens

***Définition* 2.1.1.1.** *Soient $\mathcal{E}$ un ensemble non-vide et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. On munit le couple $(\mathcal{E}, E)$ d'une **loi externe** :*

$$\begin{aligned} + : \mathcal{E} \times E &\to \mathcal{E} \\ (M, \overrightarrow{u}) &\mapsto M + \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

telle que :

1. *L'application :*

$$\begin{aligned} \varphi_P : E &\to \mathcal{E} \\ \overrightarrow{u} &\mapsto M + \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

   est bijective ;

2. $\forall\, P \in \mathcal{E},\ \forall\, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\ (P + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = P + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).$

*On dit que le triplet $(\mathcal{E}, E, +)$ est un **plan affine**. On appelle alors E **l'espace vectoriel associé** à $\mathcal{E}$ et on le note $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.*

Vocabulaire :

1. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des *points*.
2. Les éléments de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sont appelés des *vecteurs*.
3. Par définition, fixons $P \in \mathcal{E}$ alors, $\forall\, M \in \mathcal{E},\ \exists\,!\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}},\ M = P + \overrightarrow{u}$. On note alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PM} = M - P$.

Remarque 2.1.1.2. Le choix d'une origine détermine une bijection entre le plan affine et le plan vectoriel, pour $O \in \mathcal{E}$, on a les bijections réciproques :

$$\begin{aligned} \varphi_O : \overrightarrow{\mathcal{E}} &\to \mathcal{E} \\ \overrightarrow{u} &\mapsto O + \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

et

$$\varphi_O^{-1} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$$
$$M \mapsto M + \overrightarrow{OM}$$

Proposition* 2.1.1.3. (Relation de Chasles)Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a :*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC};$$
$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0};$$
$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

***Définition* 2.1.1.4.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine, $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, O un point de $\mathcal{E}$. On dit que $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un **repère cartésien** de $\mathcal{E}$. De plus,*

$$\forall\, M \in \mathcal{E},\ \exists\,!\, x, y \in \mathbb{R},\ M = O + \overrightarrow{OM} = O + x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}.$$

*On dit que x et y sont les **coordonnées** de M dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.*

***Définition* 2.1.1.5.**

1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Soient $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in E$, on définit le **produit scalaire euclidien** par :*

   $$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = xx' + yy'.$$

   *Au produit scalaire euclidien est associé la **norme euclidienne** définie par :*

   $$\|\overrightarrow{u}\|_2 = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   et vérifiant :

   (a) $\|\overrightarrow{u}\|_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *;*

   (b) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda\overrightarrow{u}\|_2 = |\lambda|\|\overrightarrow{u}\|_2$.

   (c) $|\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|_2 \|\overrightarrow{v}\|_2$ *(inégalité de Cauchy-Schwarz).*

   (d) $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|_2 \leqslant \|\overrightarrow{u}\|_2 + \|\overrightarrow{v}\|_2$ *(inégalité triangulaire).*

   *Munit du produit scalaire euclidien, on dira que E est un **plan euclidien**.*
   *Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux**, et on note $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$, si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.*
   *Soit F un sous-espace vectoriel de E, on appelle **orthogonal de F** l'ensemble :*

   $$F^{\perp} = \{\overrightarrow{u} \in E \mid \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0,\ \forall\, \overrightarrow{v} \in F\}.$$

2. *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, on dira que c'est un **plan affine euclidien** si $\overrightarrow{E}$ est un plan vectoriel euclidien.*
   *On éfinit alors une **distance** sur $\mathcal{E}$ par :*

   $$\forall\, M, N \in \mathcal{E},\ d(M, N) = \|\overrightarrow{MN}\|_2 = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

   On note parfois $d(M, N) = \|N - M\|_2$.

2.1.2 Sous-espaces affines

Définition* 2.1.2.1.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine et $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous ensemble de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un* ***sous-espace affine *de $\mathcal{E}$ s'il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que :*

$$\mathcal{F} - A = \{\overrightarrow{AB} \mid B \in \mathcal{F}\}$$

est un sous- espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Remarque 2.1.2.2. Un sous-espace affine est un espace affine.

***Proposition* 2.1.2.3.** *Une intersection quelconque de sous-espaces affines est un sous-espace affine.*

Définition* 2.1.2.4.** *On appelle* ***dimension *d'un espace affine la dimension de l'espace vectoriel associé.*
Les espaces affines de dimension 0 *sont appelés des* ***points****.*
Les espaces affines de dimension 1 *sont appelés des* ***droites affines****.*
Les espaces affines de dimension 2 *sont appelés des* ***plans affines****.*

Remarque 2.1.2.5. *Les seuls sous-espces affines d'un plan affine sont les points, les droites et le plan lui-même.*

***Définition* 2.1.2.6.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine et $\mathcal{D}$ une droite affine, alors, il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tels que :*

$$\mathcal{D} = A + \mathbb{R}\overrightarrow{u} = \{A + \lambda\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{M \in \mathcal{E} \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}\}.$$

On appelle alors $\overrightarrow{u}$ le ***vecteur directeur*** *de $\mathcal{D}$.*
On dit que deux droites affines sont ***parallèles*** *si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*
On dit que de droites sont ***perpendiculaires*** *si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.*

***Proposition-définition* 2.1.2.7.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine et X une partie non-vide de $\mathcal{E}$. On note :*

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \text{sous-espace affine de } \mathcal{E} \\ X \subset \mathcal{F}}} \mathcal{F}$$

C'est le plus petit sous-espace affine contenant X appelé ***l'espace affine engendré par X****.*

***Proposition* 2.1.2.8.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine et X une partie non-vide de $\mathcal{E}$. Alors il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que :*

$$\langle X \rangle = A + Vect\left(\{\overrightarrow{AM} \mid M \in X\}\right).$$

2.1.3 Barycentres, convexité

***Proposition-définition* 2.1.3.1.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soient $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le couple (A, λ) est appelé un **point pondéré**.*

*Soient $(A_1, \lambda_1), ..., (A_k, \lambda_k)$ des points pondérés tels que $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$. Il existe alors un unique point $G \in \mathcal{E}$, appelé **barycentre** de $(A_1, \lambda_1), ..., (A_k, \lambda_k)$ tel que :*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j} \overrightarrow{OA_i}.$$

On note alors $G = Bar\left((A_1, \lambda_1), ..., (A_k, \lambda_k)\right)$.
*Si $\lambda_1 = ... = \lambda_k$, on appelle G l'**isobarycentre** de $(A_1, \lambda), ..., (A_k, \lambda)$. Si $k = 2$, on dit que G est le **milieu** de $\{A_1, A_2\}$.*
Lorsque $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, on note $G = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$.

***Définition* 2.1.3.2.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine et A_0, A_1, A_2 trois points distincts de $\mathcal{E}$. On dit que $\{A_0, A_1, A_2\}$ est un **repère affine** de $\mathcal{E}$ si $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}\}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.*

***Proposition-définition* 2.1.3.3.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Alors, $\{A_0, A_1, A_2\}$ un repère affine ssi pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ uniques avec $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ tels que $M = Bar\left((A_0, \lambda_0), (A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2)\right)$.*
*On appelle $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ les **coordonnées barycentriques** de M.*

***Définition* 2.1.3.4.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine, $M, N \in \mathcal{E}$, on appelle **segment** l'ensemble :*

$$[M, N] = \{\lambda M + (1 - \lambda) N \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

*Un sous-ensemble $C \subset \mathcal{E}$ est dit **convexe** si :*

$$\forall\, M, N \in C,\ [M, N] \subset C.$$

***Proposition-définition* 2.1.3.5.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine et X une partie non-vide de $\mathcal{E}$. On note :*

$$Conv(X) = \bigcap_{\substack{C \, convexe \ de \ \mathcal{E} \\ X \subset C}} C$$

*C'est le plus petit convexe contenant X appelé **l'enveloppe convexe de X**.*

***Proposition* 2.1.3.6.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine et X une partie non-vide de $\mathcal{E}$. Alors :*

$$Conv(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i \mid \forall\, 1 \leqslant i \leqslant k,\ A_i \in X,\ \lambda_i \in \mathbb{R}_+,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

***Définition* 2.1.3.7.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. On sait que $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, il est donc isomorphe à $\mathbb{R}^2$ en tant qu'espace vectoriel.*
Pour $n \geqslant 2$, considérons $\mu_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité. A un complexe $\zeta^k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \in \mu_n(\mathbb{C})$ correspond un unique couple $\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ de $\mathbb{R}^2$ et donc un unique vecteur $\overrightarrow{u}_k \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$.
*Fixons une origine $O \in \mathcal{E}$ et notons alors M_k l'unique point de $\mathcal{E}$ correspondant au vecteur u_k, $k \in \{0, ..., n-1\}$. On appelle alors **polygone régulier convexe à n côtés** l'ensemble :*

$$P_n = Conv\left(\{M_0, ..., M_{n-1}\}\right).$$

Remarque 2.1.3.8. Ce n'est pas une très bonne définition mais elle est facile à comprendre et utilise des objets vus dans la partie sur les groupes.

2.2 Morphismes affines

2.2.1 Généralités

***Définition* 2.2.1.1.** *Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux plans affines et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application. On dit que f est un **morphisme d'espaces affines** (ou une **application affine**) s'il existe $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}'}$ une application linéaire, appelée **application linéaire associée** telle que :*

$$f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}),$$

c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}.$$

On note $Aff(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ l'ensemble des applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$.

Exemples : Soit $\mathcal{E}$.

1. La translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$:

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}} : \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ M &\mapsto M + \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

   On a $\overrightarrow{t}_{\overrightarrow{u}} = id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$.

2. L'homothétie de centre $O \in \mathcal{E}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} h_{O,\lambda} : \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ M &\mapsto O + \lambda\overrightarrow{OM} \end{aligned}$$

   On a $\overrightarrow{h}_{O,\lambda} = \lambda id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$.

***Proposition* 2.2.1.2.** *Soient $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ deux plans affines et $f \in Aff(\mathcal{E},\mathcal{E}')$, alors $\overrightarrow{f}$ est unique. De plus, on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{array}{ccccc} f \text{ injective} & \Leftrightarrow & f \text{ surjective} & \Leftrightarrow & f \text{ bijective} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \overrightarrow{f} \text{ injective} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{f} \text{ surjective} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{f} \text{ bijective} \end{array}$$

Enfin, si f est bijective alors f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f}^{-1} = \overrightarrow{f^{-1}}$.

Remarque 2.2.1.3. En choisissant un repère cartésien pour $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, on peut faire correspondre à $f \in Aff(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ une matrice qui est celle de $\overrightarrow{f}$ dans les bases de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}'}$ correspondantes aux repères cartésiens de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

***Proposition* 2.2.1.4.** *Soient $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ deux plans affines et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application.*

1. *$f \in Aff(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ ssi f envoie bijectivement une droite de $\mathcal{E}$ sur une droite de $\mathcal{E}'$ et elle transforme deux droites parallèles de $\mathcal{E}$ en en deux droites parallèles de $\mathcal{E}'$ (théorème fondamental de la géométrie affine).*
2. *$f \in Aff(\mathcal{E},\mathcal{E}')$ ssi f conserve les barycentres.*

2.2.2 Quelques groupes de transformations affines

***Proposition-définition* 2.2.2.1.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, l'ensemble :*

$$GA(\mathcal{E}) = \{f \in Aff(\mathcal{E}) \mid f \text{ est bijective}\}$$

*est un groupe appelé le **groupe affine de** $\mathcal{E}$.*

***Proposition-définition* 2.2.2.2.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, on définit les groupes suivants :*

1. *$T = \{f \in GA(\mathcal{E}) \mid \overrightarrow{f} = id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}\}$: **groupe des translations**;*
2. *Pour $A \in \mathcal{E}$, $H_A = \{f \in GA(\mathcal{E}) \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \overrightarrow{f} = \lambda id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}},\ f(A) = A\}$: **groupe des homothéties de centre** A;*
3. *$H = \{f \in GA(\mathcal{E}) \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \overrightarrow{f} = \lambda id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}\}$: **groupe des homothéties translations**.*

Alors $H \simeq T \rtimes H_A \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}^*$.

2.3 Isométries

2.3.1 Isométries vectorielles

***Définition* 2.3.1.1.** *Soit E un plan vectoriel euclidien. Soit $f : E \to E$ une application linéaire, on dit que f est une **isométrie vectorielle** si :*

$$\forall\, x, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles, c'est un groupe appelé le ***groupe orthogonal*** *de E.*

Remarque 2.3.1.2. On verra, dans la suite du cours, que les isométries conservent les angles non-orientés et les distances.

***Lemme* 2.3.1.3.** *Soient E un plan vectoriel euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire. On définit l'**adjoint** de f comme étant l'unique application linéaire $f^* : E \to E$ vérifiant :*

$$\forall\, x, y \in E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

(matriciellement, c'est la transposée).
Si $f \in O(E)$, alors $f^* \circ f = f \circ f^* = id$ et donc $f^{-1} = f^*$.

Rappels : Une base $\{e_1, ..., e_n\}$ d'un espace vectoriel euclidien de dimension n est dite **orthonormée** (BON) si :

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}.$$

La BON sera dite **directe** si la matrice de passage dans la base canonique est de déterminant positif, **indirecte** sinon.

***Proposition* 2.3.1.4.** *Soient E un plan vectoriel euclidien et $f : E \to E$ une application linéaire. Il y a équivalence entre :*

1. *$f \in O(E)$;*
2. *$\forall\, x \in E$, $\|f(x)\|_2 = \|x\|_2$;*
3. *$f^* \circ f = f \circ f^* = id$;*
4. *l'image d'une BON par f est une BON ;*
5. *soit $\mathcal{B}$ une BON alors $Mat(f; \mathcal{B}) \in O_2(\mathbb{R})$.*

***Corollaire* 2.3.1.5.** *Soient E un plan vectoriel euclidien et $f \in O(E)$, alors :*

1. *$\det(f) = \pm 1$;*
2. *$Sp(f) \subset \{\pm 1\}$.*

***Définition* 2.3.1.6.** *Soient E un plan vectoriel euclidien et $f \in O(E)$.*

1. *Si $\det(f) = 1$ on dit que f est une **isométrie vectorielle posive** (ou **rotation**). On note alors :*

$$O^+(E) = SO(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = 1\}.$$

   C'est un sous-groupe disntigué de $O(E)$.

2. *Si $\det(f) = -1$ on dit que f est une **isométrie vectorielle négative** (ou **retournement**). On note alors :*

$$O^-(E) = \{f \in O(E) \mid \det(f) = -1\}.$$

Exemples :symétries orthogonales (ou réflexions), rotations.

2.3.2 Isométries affines

***Définition* 2.3.2.1.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. On dit que f est une **isométrie affine** si $overrightarrow f$ est une isométrie vectorielle.*
On note $Is(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines, c'est un groupe.

***Proposition* 2.3.2.2.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Il y a équivalence entre :*

1. *$f \in Is(\mathcal{E})$;*
2. *$\forall\, M, N \in \mathcal{E}$, $d(f(M), f(N)) = d(M, N)$.*

***Définition* 2.3.2.3.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien et $f \in Is(\mathcal{E})$.*

1. *Si $\det(\overrightarrow{f}) = 1$ on dit que f est une **isométrie posive** (ou un **déplacement**).*
   On note alors :
   $$Is^{+}(\mathcal{E}) = \{f \in Is(\mathcal{E}) \mid \det(\overrightarrow{f}) = 1\}.$$
   C'est un sous-groupe disntigué de $Is(\mathcal{E})$.
2. *Si $\det(\overrightarrow{f}) = -1$ on dit que f est une **isométrie négative** (ou **antidéplacement**). On note alors :*
   $$Is^{-}(\mathcal{E}) = \{f \in Is(\mathcal{E}) \mid \det(\overrightarrow{f}) = -1\}.$$

Théorème* 2.3.2.4. *(décomposition canonique d'une isométrie affine) *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $f \in Is(\mathcal{E})$. Il existe une unique isométrie affine ayant un point fixe $g \in Is(\mathcal{E})$ et $\overrightarrow{u} \in \ker(\overrightarrow{f} - id_{\mathcal{E}})$ tels que :*

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{u}}.$$

De plus, cette écriture est unique.

Remarque 2.3.2.5. Si on note :

$$Is_{fixe}(\mathcal{E}) = \{f \in Is(\mathcal{E}) \mid \exists\, M \in \mathcal{E},\ f(M) = M\},$$

alors, $Is_{fixe}(\mathcal{E}) \simeq O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.
Ainsi, pour décrire une isométrie affine, il nous suffit de comprendre sa partie vectorielle.

2.3.3 Les angles

***Définition* 2.3.3.1.** *Soient E un plan vectoriel euclidien, $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{+}\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{D}' = \mathbb{R}_{+}\overrightarrow{v}$ deux demi-droites de E. Le nombre :*

$$\frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|_2 \|\overrightarrow{v}\|_2}$$

ne dépend pas du choix de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$-1 \leqslant \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\| \overrightarrow{u} \|_2 \| \overrightarrow{v} \|_2} \leqslant 1.$$

Comme $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *est une bijection :*

$$\exists \,! \, \theta \in [0, \pi], \; \cos(\theta) = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{\| \overrightarrow{u} \|_2 \| \overrightarrow{v} \|_2}.$$

*On appelle θ **l'angle non-orienté** entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.*

***Proposition* 2.3.3.2.** *Les isométries vectorielles conservent les angles non-orientés.*

***Proposition-définition* 2.3.3.3.** *Soient E un plan vectoriel euclidien, on note $\mathcal{D}_+(E)$ l'ensemble des demi-droites de E.*
Soit $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $\mathcal{D}_+(E) \times \mathcal{D}_+(E)$ définie par :

$$(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \mathcal{R} (\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2) \Leftrightarrow \exists \, u \in SO(E), \; \mathcal{D}'_1 = u(\mathcal{D}_1), \; \mathcal{D}'_2 = u(\mathcal{D}_2).$$

*On note $\mathcal{A}_+ = \mathcal{D}_+(E) \times \mathcal{D}_+(E) / \mathcal{R}$, c'est un groupe appelé **groupe des angles orientés des demi-droites**.*

Notation : On note $\widehat{\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2}$ l'angle orienté entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, c'est sa classe d'équivalence.

Remarque 2.3.3.4. Pour comprendre un angle il faut donc comprendre les rotations du plan.
On verra par la suite la notion de mesure d'angle.

***Proposition* 2.3.3.5.** *Soit E un plan vectoriel euclidien.*

1. *Les angles orientés de demi-droites sont invariants par rotations.*
2. $\forall \, u \in O^-(E)$, $\widehat{\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2} = -\widehat{u(\mathcal{D}_1) u(\mathcal{D}_2)}$

2.3.4 Générateurs du groupe orthogonal, classification des isométries

***Proposition* 2.3.4.1.** *Soit E un plan vectoriel euclidien.*

1. *Si $u \in O^-(E)$, alors u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion).*
2. *Si $u \in SO(E)$, alors il existe s_1, s_2 deux réflexions dont l'une peut être choisie arbitrairement, telles que $r = s_1 s_2$.*
3. *Soient $r \in SO(E)$, $s \in O^-(E)$, alors $s \circ r \circ s^{-1} = r^{-1}$.*
4. *$SO(E)$ est commutatif.*

***Corollaire* 2.3.4.2.** *Le groupe orthogonal est engendré par les réflexions.*

***Théorème* 2.3.4.3.** *Soient E un plan vectoriel euclidien et $\mathcal{B}$ une BON de E. Pour $f \in O(E)$, on note $M = Mat(f;\mathcal{B})$.*

1. *Si $f \in SO(E)$, $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$, $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.*
2. *Si $f \in O^-(E)$, $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$, $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.*

***Définition* 2.3.4.4.** *Soit E un plan vectoriel euclidien orienté (c'est-à-dire que l'on a choisi une base directe ou indirecte qui définit l'orientation). Soit $\widehat{a} \in \mathcal{A}_+$ un angle orienté de demi-droites. Il existe alors une unique rotation $r \in SO(E)$ telle que $\widehat{a} = \widehat{\mathcal{D}u(\mathcal{D})}$, où $\mathcal{D}$ est une demi-droite.*
La matrice de r dans une BON est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le $\theta \in \mathbb{R}$ est appelé une ***mesure*** *de l'angle $\widehat{a}$. Les autres mesures sont dans $\theta + 2\pi\mathbb{Z}$.*

Remarque 2.3.4.5. En général on prend un représentant dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

***Proposition* 2.3.4.6.** *Soit E un plan vectoriel euclidien, on note :*

$$\mathbb{S}^1 = \{\overrightarrow{x} \in E \mid \|x\|_2 = 1\}$$

le cercle unité de $\mathcal{E}$. On a les isomorphismes de groupes :

$$SO(E) \simeq \mathcal{A}_+ \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{U}.$$

De plus on a la bijection :

$$SO(E) \simeq \mathbb{S}^1.$$

Corollaire* 2.3.4.7. *(classification des isométries vectorielles du plan) *Les isométries vectorielles d'un plan vectoriel euclidien sont :*

1. *l'identité (rotation d'angle 0 ou homothétie de rapport 1) ;*
2. *les symétries orthogonales de droite $\mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$;*
3. *les rotations d'angle $\theta \in]0,\pi[$;*
4. *les homothéties de rapport -1 (rotations d'angle π).*

Théorème* 2.3.4.8. *(classification des isométries affines du plan) *Les isométries affines positives d'un plan affine euclidien sont :*

1. *les translations ;*
2. *les rotations ;*

Les isométries affines négatives d'un plan affine euclidien sont :

1. *les symétries orthogonales par rapport à une droite (réflexions) ;*
2. *les symétries glissées (composition d'une translation et d'une symétrie).*

2.4 Formes quadratiques, coniques

2.4.1 Formes bilinéaires, formes quadratiques

***Définition* 2.4.1.1.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application*

$$b : E \times E \to \mathbb{R}$$

*est dite **bilinéaire** si :*

$$\forall\, y \in E,\ b(.,y) : E \to \mathbb{R} \ \text{ est linéaire et}$$

$$\forall\, x \in E,\ b(x,.) : E \to \mathbb{R} \ \text{ est linéaire.}$$

*On dit que b est **symétrique** si :*

$$\forall\, x, y \in E,\ b(x,y) = b(y,x).$$

*On dit que b est **positive** si :*

$$\forall\, x \in E,\ b(x,x) \geqslant 0.$$

*On dit que b est **définie** si :*

$$\forall\, x \in E,\ b(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Exemple : $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

***Définition* 2.4.1.2.** *Une forme bilinéaire symétrique définie positive est appelée **un produit scalaire**.*

Exemple : le produit scalaire euclidien usuel.

***Définition* 2.4.1.3.** *Une **forme quadratique** est une application*

$$q : E \to \mathbb{R}$$

vérifiant :

1. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, x \in E,\ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$.
2. *l'application :*

$$\begin{aligned} E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto q(x+y) - q(x) - q(y) \end{aligned}$$

est bilinéaire.

***Proposition* 2.4.1.4.** *Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors :*

$$q : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto b(x, x)$$

est une forme quadratique vérifiant :

$$b(x, y) = \frac{1}{2} \left(q(x + y) - q(x) - q(y) \right).$$

Exemple : $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$.

***Définition* 2.4.1.5.** *Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E et soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E. Alors, la matrice :*

$$Mat(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

*est une matrice symétrique (${}^tM = M$), on dit que c'est la **matrice qui représente** b **dans la base** $\mathcal{B}$.*

Remarque 2.4.1.6. Si on note X la matrice représentant le vecteur x, Y la matrice représentant le vecteur y et M la matrice représentant b, on a :

$$b(x, y) = {}^tXMY.$$

***Définition* 2.4.1.7.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et b une forme bilinéaire symétrique sur E.*

1. *On dit que x et y sont **orthogonaux** si :*

$$b(x, y) = 0.$$

   On note alors $x \perp y$.

2. *Une famille $\{e_1, ..., e_k\}$ est dite **orthogonale** si :*

$$b(e_i, e_j) = 0, \; \forall \, i \neq j.$$

   *Elle sera dite **orthonormée** si :*

$$b(e_i, e_j) = \delta_{i,j}.$$

3. *Soit F un sous-espace vectoriel de E, on appelle **orthogonal** de F le sous-epace :*

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid b(x, y) = 0, \; \forall \, y \in E\}.$$

***Définition* 2.4.1.8.** *Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire b. Alors :*

$$\exists\,!\, u^* \in End(E),\ \forall\, x, y \in E,\ b(u(x), y) = b(x, u^*(y)).$$

*On appelle u^* l'**adjoint** de u (matriciellement, c'est la matrice $B^{-1}\,{}^tUB$, où B est la matrice représentant b et U celle représentant u).*
*On dit que u est un endomorphisme **normal** si $u^*u = uu^*$.*
*On dit que u est un endomorphisme **auto-adjoint** (ou **symétrique**) si $u = u^*$.*
*On dit que u est un endomorphisme **orthogonal** si $u^*u = uu^* = id_E$.*

***Proposition* 2.4.1.9.** *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Alors, pour toute forme bilinéaire symétrique b, il existe un unique endomorphisme $u : E \to E$ tel que :*

$$\forall\, x, y \in E,\ b(x, y) = \langle u(x), y \rangle.$$

Théorème* 2.4.1.10. *(d'inertie de Sylvester) *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et b une forme bilinéaire symétrique.*
Alors, il existe une base orthogonale $\{e_1, ..., e_n\}$ pour b.
De plus, si on note :

$$p = \sharp\{i \in \{1, ..., n\} \mid b(e_i, e_i) > 0\},$$

$$q = \sharp\{i \in \{1, ..., n\} \mid b(e_i, e_i) < 0\},$$

alors le couple (p, q) est indépendant du choix de la base. On a alors :

$$rg(b) = rg(Mat(b; \{e_1, ..., e_n\})) = p + q.$$

*On appelle le couple (p, q) la **signature** de b.*

Remarque 2.4.1.11. Soit q une forme quadratique et b sa forme bilinéaire associée. Alors d'après le théorème précédent, la forme q s'écrit comme une somme ou différence de carrés.

2.4.2 Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints

***Théorème* 2.4.2.1.** *Soit E un plan vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire. Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E.*
Alors, il existe une BON constituée de vecteurs propres de u, c'est-à-dire, il existe une BON dans laquelle u est diagonalisable.

***Corollaire* 2.4.2.2.** *Soit E un plan vectoriel muni d'un produit scalaire. Considérons une forme bilinéaire symétrique sur E.*
Alors, il existe une base simultanément orthogonale pour le produit scalaire et pour la forme bilinéaire symétrique.

2.4.3 Coniques

***Définition* 2.4.3.1.** *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine réel. Soit $\mathcal{R} = (O, \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$. Une application :*

$$\begin{aligned} F : \mathcal{E} &\to \mathbb{R} \\ M &\mapsto F(M) \end{aligned}$$

où :

$$F(M) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f,$$

*avec $\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ est appelée un **polynôme de degré** 2 sur $\mathcal{E}$.*

***Lemme* 2.4.3.2.** *Soient F et F' deux polynômes de degré 2 sur $\mathcal{E}$ un plan réel affine. Alors, la relation suivante :*

$$F \sim F' \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ F' = \lambda F$$

est une relation d'équivalence.

***Définition* 2.4.3.3.** *On appelle **conique** de $\mathcal{E}$, un plan affine réel, la classe d'équivalence d'un polynôme de degré 2 sur $\mathcal{E}$.*
*On appelle **points de la conique** l'ensemble :*

$$F(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{E} \mid F(M) = 0\}.$$

***Proposition* 2.4.3.4.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel et F un polynôme de degré 2 sur $\mathcal{E}$.*
Alors, pourt tout $A \in \mathcal{E}$, il existe une unique forme quadratique $q \neq 0$ (indépendante de A), une forme linéaire L_A sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $d_A \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F(M) = q(\overrightarrow{AM}) + L_A(\overrightarrow{AM}) + d_A.$$

***Définition* 2.4.3.5.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel, $\mathcal{C}$ une conique de $\mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{E}$.*
*On dit que A est le **centre** de la conique $\mathcal{C}$ si, lorsque on prend un polynôme de degré 2 F représentant $\mathcal{C}$, alors :*

$$F(M) = q(\overrightarrow{AM}) + d_A,$$

c'est-à-dire, $L_A(\overrightarrow{AM}) = 0$.
Remarquons que ceci est équivalent à :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*,\ F \circ h_{A,-1} = \lambda F;$$

où $h_{A,-1}$ est l'homothétie de centre A et de rapport -1.

Remarque 2.4.3.6. A est centre de $\mathcal{C}$ ssi $\forall\, M \in \mathcal{C},\ h_{A,-1}(M) \in \mathcal{C}$.

***Lemme* 2.4.3.7.** *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel, $\mathcal{C}$ une conique de $\mathcal{E}$ et F un polynôme de degré 2 de $\mathcal{E}$ représentant $\mathcal{C}$. Soit q la forme quadratique associée à F, alors :*

$$q \textit{ est non dégénérée ssi } \mathcal{C} \textit{ possède un unique centre.}$$

Théorème* 2.4.3.8. *(classification des coniques affines)
Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel, $\mathcal{C}$ une conique de $\mathcal{E}$ et F un polynôme de degré 2 de $\mathcal{E}$ représentant $\mathcal{C}$. Soit q la forme quadratique associée à F.

1. *Si q est non-dégénérée, alors $\mathcal{C}$ possède un unique centre et on a :*

$$f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + f.$$

   q est alors de signature $(2,0)$, $(0,2)$ ou $(1,1)$.

   (a) *Si la signature de q est $(2,0)$ ou $(0,2)$ et si $F(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ ou $F(\mathbb{R}) \neq \{O\}$ (cas où la constante est nulle), on dit que la conique est un **ellipse**.*

   (b) *Si la signature de q est $(1,1)$, on dit que la conique est une **hyperbole** ou une **réunion deux** 2 **droites** (cas où la constante est nulle).*

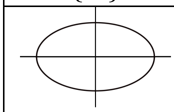
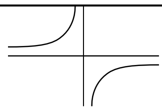
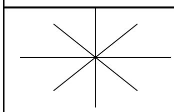
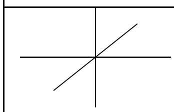
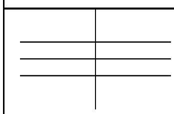
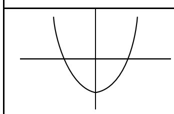
2. *Si q est dégénérée, on a les cas suivants :*

   (a) *$F(\mathbb{R}) = \emptyset$.*

   (b) *La forme linéaire est nulle, on a donc une **droite** ou **deux droites parallèles**.*

   (c) *La forme linéaire est non-nulle, on dit alors que la conique est une **parabole**.*

Proposition* 2.4.3.9. *(théorème de l'axe principal) *Soient $\mathcal{E}$ un plan affine réel euclidien, $\mathcal{C}$ une conique à centre de $\mathcal{E}$ et F un polynôme de degré 2 de $\mathcal{E}$ représentant $\mathcal{C}$. Soient q la forme quadratique associée à F et b sa forme bilinéaire symétrique associée.*
Alors, les axes de symétrie de $\mathcal{C}$ sont dirigés par les droites propres de u, l'unique endomorphisme auto-adjoint associé à b tel que $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \langle u(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle$.

<table>
<tr><th>$rg(q)$</th><th>signature</th><th>conique</th></tr>
<tr><td rowspan="5">2</td><td rowspan="3">$(2,0)$ ou $(0,2)$</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td>$\{O\}$</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(1,1)$</td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">$(1,0)$ ou $(0,1)$</td><td>$\emptyset$</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Tab. 2.1 – Classification des coniques affines

Bibliographie

[AF] Jean-Marie Arnaudiès et Henri Fraysse. *Cours de mathématiques, tome 4. Algèbre bilinéaire et géométrie.* Dunod, 1993.

[B1] Marcel Berger. *Géométrie, Tome 1.* Nathan, 1990.

[B2] Marcel Berger. *Géométrie, Tome 2.* Nathan, 1990.

[C] François Combes. *Algèbre et géométrie.* Bréal, 1998.

[F1] Jean Fresnel. *Méthodes modernes en géométrie.* Hermann, 1996.

[F2] Jean Fresnel. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens.* Hermann, 1999.

[L] Yves Ladegaillerie. *Géométrie - Exercices corrigés pour le CAPES de mathématiques.* Ellipses, 2004.

[P] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1997.

[T] Patrice Tauvel. *Géométrie.* Dunod, 2005.