Université Le Mirail **Toulouse**
L1 MIASHS: méthodologie mathématique (MI003AX) **24 juin 2013**

Examen 2$^{\text{ème}}$ session: Correction

Exercice 1

1. $non(P)$: $\exists\, y \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $y \neq x^2$;
   $non(Q)$: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$;
   $non(R)$: $\exists\, k \in \mathbb{Z}$, $\forall\, q \in \mathbb{Z}$, $2q \neq k$.
2. (P) est fausse car l'équation $x^2 = 1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
   (Q) est vraie car, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   (R) est fausse vu que 1 n'est pas un nombre pair.

Exercice 2

1. $x \in E \setminus (A \cup B) \Leftrightarrow non(x \in A \cup B) \Leftrightarrow non(x \in A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow non(x \in A) \text{ et } non(x \in B) \Leftrightarrow (x \in E \setminus A) \text{ et } (x \in E \setminus B) \Leftrightarrow x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.
2. $A \cup ((E \setminus A) \cap B) = (A \cup (E \setminus A)) \cap (A \cup B) = E \cap (A \cup B) = A \cup B$.
3. $\text{Card}\,(\mathcal{P}((E \setminus A) \cap A)) = \text{Card}\,(\mathcal{P}(\emptyset)) = \text{Card}\,(\{\emptyset\}) = 1$.

Exercice 3

1. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = (1-1)^n = 0^n = 0$.
2. $\sum_{k=0}^{2n} (-2)^k C_{2n}^k = (1-2)^{2n} = (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$.

Exercice 4

Considérons les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{1+x}{1-x} \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2x + 1 \end{array}$$

1. f est injective, en effet, si $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors :
$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow (1-x)(1+y) = (1+x)(1-y) \Leftrightarrow y - x = x - y \Leftrightarrow 2(y-x) = 0 \Leftrightarrow y = x.$$
   f est surjective car, pour $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x = \dfrac{y-1}{y+1}$ convient.
   f est bijective car injective et surjective. Ainsi, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.
   g n'est pas injective car $g(0) = g(-2) = 1$.
   g n'est pas surjective car pour $y = -1$, l'équation $g(x) = (x-1)^2 = y$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
   g n'est pas bijective car ni injective, ni surjective. g^{-1} n'existe pas.
2. $g \circ f(x) = \dfrac{4}{(1-x)^2}$ et $f \circ g(x) = -1 - \dfrac{2}{x(x+2)}$.

Exercice 5

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 2,\ 2^n \geqslant n+2.$$

<u>Initialisation</u> : Pour $n = 2$, $2^2 = 4 = 2+2$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \geqslant 2$, et supposons, par hypothèse de récurrence que :

$$2^n \geqslant n+2.$$

Il faut montrer que :

$$2^{n+1} \geqslant n+3.$$

Comme $2^n \geqslant n+2$, en multipliant par 2 dans les deux membres de l'inégalité, on obtient :

$$2^{n+1} = 2.2^n \geqslant 2(n+2) = 2n+4 \geqslant n+3,$$

vu que $2n \geqslant n$ et $4 \geqslant 3$.
<u>Conclusion</u> : Pour tout $n \geqslant 2$, $2^n \geqslant n+2$.

Exercice 6

1. $1 + \dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{1-x+2x}{1-x} = \dfrac{1+x}{1-x} = f(x)$.
2. (a) Si $I = [0,1[$, alors $f(I) = [1,+\infty[$ et 1 est minorant, borne inférieure et minimum. Il n'y a ni majorant, ni borne supérieure, ni maximum.
   (b) Si $I =]1,+\infty[$ alors $f(I) =]-\infty,-1[$ et -1 est majorant et borne supérieure ; par contre il n'y a pas de maximum. Il n'y a ni minorant, ni borne inférieure, ni minimum.
   (c) Si $I =]-\infty,1[$ alors $f(I) =]-1,+\infty[$ et -1 est minorant et borne inférieure ; par contre il n'y a pas de minimum. Il n'y a ni majorant, ni borne supérieure, ni maximum.
   (d) Si $I = [-2,-1[$ alors $f(I) = [-\frac{1}{3},0[$ et $-\frac{1}{3}$ est minorant, borne inférieure et minimum. 0 est majorant et borne supérieure ; par contre, il n'y a pas de maximum.