Université Paul Sabatier **Toulouse**
I.U.T. A, Département d'Informatique **Année 2009-2010**

TD2 : CORRECTION DE L'EXERCICE 10.

(a) : Comme f est définie et continue sur $]-1,+\infty[$ et $n+1$ fois dérivables sur ce même intervalle, on peut écrire la formule de Taylor-Lagrange au voisinage de 0 :

$$\forall\, x \in\,]-1,+\infty[\,, \exists\, c \in]0,x[\ /\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

(b) : Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ \forall\, x \in\,]-1,+\infty[\,.$$

<u>*Initialisation*</u> : pour $n=1$, montrons que :

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x},\ \forall\, x \in\,]-1,+\infty[\,.$$

Soit $x \in\,]-1,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}\,.$$

<u>*Hérédité*</u> : soit $n \geqslant 1$ fixé, supposons alors que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire que :

$$(HR):\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ \forall\, x \in\,]-1,+\infty[$$

et montrons que la propriété est vrai au rang $n+1$, c'est-à-dire que l'on a :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},\ \forall\, x \in\,]-1,+\infty[\,.$$

Soit $x \in\,]-1,+\infty[$, on a alors :

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = ((-1)^{n+1}\tfrac{(n-1)!}{(1+x)^n})' \text{ par } (HR).$$

Or :

$$((1+x)^{-n})' = -n(1+x)^{-n-1} = \frac{-n}{(1+x)^{n+1}}.$$

On en déduit donc que :

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(-1)\frac{n(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^{n+2}\frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

<u>*Conclusion*</u> : $\forall\, n \geqslant 1,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ \forall\, x \in\,]-1,+\infty[$.

(c) : Soit $x \in \ [0, \frac{1}{10}]$, si on note $R_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{(1+c)^{n+1}}\,x^{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$ le reste à l'ordre n dans la formule de Taylor-Lagrange, on obtient les inégalités :

$$|R_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(n+1)10^{n+1}}\frac{1}{(1+c)^{n+1}}\ .$$

Or $c \in]0, x[\subset]0, \frac{1}{10}[$, donc $\dfrac{1}{(1+c)^{n+1}} < 1$ et comme $n \geqslant 0$ on a $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$. On en déduit donc que :

$$\forall\, x \in \ [0, \frac{1}{10}]\ ,\ |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{10^{n+1}}\ .$$

(d) : On cherche une valeur approchée de $\ln(1.1)$ grâce à la formule de Taylor-Lagrange. On connait le développement de $\ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0, 0.1]$, il nous suffit donc de prendre $x = 0.1$ et on a l'approximation à l'ordre n suivante :

$$\ln(1.1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,(0.1)^k + R_n(0.1)\ .$$

On veut une précision de $\ln(1.1)$ à 10^{-3} près, c'est-à-dire que l'on veut :

$$\left|\ln(1.1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,(0.1)^k\right| = |R_n(0.1)| \leqslant \frac{1}{10^3}\ .$$

Or, d'après la question (c), on sait que $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{10^{n+1}}$, il faut donc prendre $n = 2$.
Ainsi pour avoir une précision de $\ln(1.1)$ à 10^{-3} près, il suffit juste d'utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. On obtient alors :

$$\ln(1.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} = 0.095\ .$$

(e) : Pour calculer $\ln(2)$ à partir du développement de Taylor-Lagrange de $\ln(x+1)$, on doit prendre $x = 1$ donc la majoration du reste change car maintenant $x \in \ [0, 1]$. Par un calcul similaire à celui fait dans la question (c), on obtient la majoration :

$$\forall\, x \in \ [0, 1]\ ,\ |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}\ .$$

Donc pour avoir $|R_n(1)| \leqslant \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000}$ il faut prendre $n = 999$. Ainsi pour avoir une précision de $\ln(2)$ à 10^{-3} près, il suffit juste d'utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 999. On obtient alors :

$$\ln(2) \approx \sum_{k=1}^{999} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \approx 0.693.$$