
TD 6: Formes bilinéaires, formes quadratiques, coniques

Exercice 1 Les formes suivantes sont-elles bilinéaires, symétriques, définies, positives ?

1. $b_1(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_1 - x_2y_2 - x_1y_2; x, y \in \mathbb{R}^2$.
2. $b_2(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1; x, y \in \mathbb{R}^2$.
3. $b_3(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt; f, g \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$.

Exercice 2 Trouver une base orthogonale pour les formes bilinéaires symétriques suivantes :

1. $b_4(x, y) = -x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_2; x, y \in \mathbb{R}^2$.
2. $b_5(x, y) = -2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 2x_1y_2; x, y \in \mathbb{R}^2$.
3. $b_6(x, y) = x_2y_1 + x_1y_2; x, y \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien de dimension finie. Soient u un endomorphisme de E et F un sous-espace de E . Montrer que :

$$u(F^\perp) \subset F^\perp \Leftrightarrow u^*(F) \subset F.$$

Exercice 4 Diagonaliser les endomorphismes auto-adjoints de \mathbb{R}^2 suivants et donner à chaque fois une base constituée de vecteurs propres :

1. $f(x, y) = (x - 3y, -3x + 2y)$;
2. $g(x, y) = (8x + y, x - 4y)$;
3. $h(x, y) = (x - 2y, -2x + 5)$.

Exercice 5 Trouver de 3 manières différentes la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $q_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$;
2. $q_2(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$;
3. $q_3(x) = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 4x_2^2$;
4. $q_4(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$;
5. $q_4(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$.

Exercice 6 Soient F et F' deux polynômes de degré 2 sur \mathcal{E} un plan réel affine. Montrer que la relation suivante :

$$F \sim F' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, F' = \lambda F$$

est une relation d'équivalence.

Exercice 7 Pour les coniques suivantes, déterminer si elles ont un centre. Quel est leur nature ? Donner leurs axes de symétrie.

1. $(C_1) : x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 6y - 14 = 0$;
2. $(C_2) : 25x^2 + y^2 + 10x - 10y + 30 = 0$;
3. $(C_3) : 3x^2 + 2y^2 + 18x + 4y + 5 = 0$;
4. $(C_4) : 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 16x - 17y + 16 = 0$;
5. $(C_5) : 2x^2 + y^2 + 3xy - 4x - 5y = 0$;
6. $(C_6) : x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y + 3 = 0$;
7. $(C_7) : -x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$;
8. $(C_8) : x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x + 3 = 0$.