U.P.S. 2010-2011, L3 MATHS FONDA ALGÈBRE, FEUILLE 5
ANNEAUX

Exercice 1. Si p est un nombre premier, quels sont les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$?

Exercice 2. Un élément x d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n = 0$.

a) Montrer que si A est commutatif alors l'ensemble des éléments nilpotents de A forme un idéal de A.

b) Quel est cet ensemble pour $A = M_n(\mathbf{R})$?

Exercice 3. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 4. Montrer que le seul morphisme d'anneau de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est l'identité.

Exercice 5. Soit A un anneau.

a) Pour tout élément nilpotent a de A, montrer que $1 - a$ est inversible et calculer son inverse.

b) Soient a et b deux éléments de A. On suppose que ab et ba sont nilpotents. Exprimer alors $(1 - ba)^{-1}$ en fonction de $(1 - ab)^{-1}$.

c) On ne suppose plus que ab et ba sont nilpotents. Montrer que si $1 - ab$ est inversible alors $1 - ba$ l'est aussi.

d) On fixe $a \in A$ et on considère l'application $u_a : A \to A, x \mapsto ax - xa$. Montrer que si a est nilpotent alors il existe un entier $p > 0$ tel que $(u_a)^p = 0$.

Exercice 6. Soient A un anneau commutatif intègre de caractéristique non nulle. On note p (premier) sa caractéristique.

a) Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, p - 1\}$, C_p^k est divisible par p.

b) En déduire que l'application $F_p : A \to A, a \mapsto a^p$ est un morphisme d'anneau.

c) Montrer que $\{a \in A \mid F_p(a) = a\}$ est le plus petit sous-anneau de A contenant 1.

d) Montrer que si A est fini alors F_p est un automorphisme.

e) Montrer que pour tous $k, n \in \mathbf{N}$ et tous $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$, on a l'égalité :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^{(p^k)} = \sum_{i=1}^{n} a^{(p^k)} b^{(p^k)}.$$

Exercice 7. On considère $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, a \mapsto (a \bmod n)$.

a) Montrer que φ est un morphisme d'anneaux. Donner son noyau et son image.

b) Quel est le reste de la division euclidienne de 1515^{1515} par 7 ?

Exercice 8. Quelle est la condition sur les entiers m et n pour qu'il existe un morphisme de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$? Montrer que s'il en existe un alors il est unique.

Exercice 9. Soient a, b deux éléments d'un anneau commutatif A. Montrer que :

a) $A[X]/(X - a)$ est isomorphe à A.

b) $A[X, Y]/(Y - b)$ est isomorphe à $A[X]$.

c) $A[X, Y]/(X - a, Y - b)$ est isomorphe à A.

Exercice 10. Soit K un corps. Déterminer les éléments inversibles et les idéaux (principaux et autres) de l'anneau $K[X,Y]/(X^2, XY, Y^2)$.

Exercice 11. Soit J l'idéal de $\mathbf{R}[X]$ engendré par X^3+3X^2+4X+2 et $X^4+2X^3+3X^2+2X+2$. Donner un isomorphisme entre $\mathbf{R}[X]/J$ et $\mathbf{C}$.

Exercice 12. Quels sont les inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}[i] = \mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$?

Exercice 13. On considère $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\sqrt{2}$.

a) Montrer que c'est un anneau intègre.

b) Déterminer les éléments inversibles de cet anneau.

c) Est-ce un anneau principal ?