TD 5: Isométries

Exercice 1 Soient $\mathcal{E}$ un espace affine et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application. Montrer que f est affine ssi f conserve les barycentres.

Exercice 2 Déterminer la nature des transformations du plan vectoriel euclidien dont les matrices dans la base canonique sont :

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel euclidien. Une symétrie est dite *orthogonale* si les sous-espaces supplémentaires sont orthogonaux.

1. Montrer qu'une symétrie orthogonale est une isométrie.
2. Soit s une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathbb{R}u$, montrer que $s(x) = x - 2\dfrac{\langle x, u\rangle}{\|u\|_2^2}u$.

Exercice 4 Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Montrer que : $Is(\mathcal{E}) \simeq \overrightarrow{\mathcal{E}} \rtimes O(\overrightarrow{\mathcal{E}})$ et que $Is^+(\mathcal{E}) \simeq \overrightarrow{\mathcal{E}} \rtimes SO(\overrightarrow{\mathcal{E}})$.

Exercice 5 Déterminer tous les sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$.

Exercice 6 Montrer que l'on a les isomorphismes de groupes suivants :

$$SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathcal{A}_+$$

Exercice 7 Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Pour $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble, on note :

$$Is(\mathcal{F}) = \{f \in Is(\mathcal{E}) \mid f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\}.$$

1. Montrer que $Is(\mathcal{F})$ est un sous-groupe de $Is(\mathcal{E})$.
2. Soient $M, N \in \mathcal{E}$ deux points. Montrer que $Is(\{M, N\}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Pour $n \geqslant 3$, on note P_n le polygone régulier convexe à n côtés de $\mathcal{E}$. Montrer que $Is(P_n) \simeq D_n$.

Exercice 8 Donner les expressions complexes et les caractérisations des isométries affines d'un plan affine euclidien.

Exercice 9 Etudier l'isométrie plane dont la forme complexe est :

$$z \mapsto i\overline{z} + 2.$$

Exercice 10 Soit P_6 un hexagone régulier dont les sommets sont $\{A_0, ..., A_5\}$. Considérons les deux triangles T et T' de sommets respectifs : $\{A_0, A_2, A_4\}$ et $\{A_1, A_3, A_5\}$.
On note $Is(T, T')$ l'ensemble des isométries du plan de T dans T' et $Is(T', T)$ celles de T' sur T.

1. Montrer que $Is(T) = Is(T')$, $Is(T, T') = Is(T', T)$, $Is(P_6) = Is(T) \cup Is(T, T')$.
2. Montrer qu'il existe $f \in Is(T', T)$ telle que :
   (a) $\forall\, g \in Is(P_6)$, $f \circ g = g \circ f$;
   (b) $Is(T, T') = f \circ Is(T)$.
3. Montrer que $Is(T) \simeq \mathfrak{S}_3$.
4. Montrer que $Is(P_6) \simeq \mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. A-t-on le même type de propriétés pour P_8 ?
6. $\forall\, n \geqslant 3$, montrer que $Is(P_n) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 11 Soit E un plan vectoriel euclidien. On note s_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.

1. Montrer que : $\forall\, f \in O(E)$, $f \circ s_D \circ f^{-1} = s_{f(D)}$.
2. Soit $f \in GL(E)$, montrer que si f laisse invanriantes toutes les droites vectorielles de E alors f est une homothétie. Quelles sont les homothéties qui sont aussi des isométries ?
3. En déduire que $Z(O(E)) = \{-id_E, id_E\}$. $O(E)$ est-il un groupe commutatif ?