

**Exercice 1.** Montrer que tout groupe de type fini est au plus dénombrable. Le groupe multiplicatif  $\mathbf{Q}_+^*$  est-il de type fini ? et le groupe additif  $\mathbf{Q}$  ?

**Exercice 2.** Pour tout entier  $r > 0$ , donner un exemple d'un groupe abélien libre de type fini de rang  $r$  et d'un sous-groupe propre de même rang.

**Exercice 3.** Soit  $G = \{(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \mid a \equiv b \pmod{10}\}$ . Montrer que  $G$  est un sous-groupe de type fini de  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ , puis trouver un isomorphisme de la forme  $\varphi : G \rightarrow \mathbf{Z}^r$  pour un  $r$  à préciser.

**Exercice 4.** Un groupe simple est un groupe non trivial dont les seuls sous-groupes distingués sont lui-même et son sous-groupe trivial. Déterminer les groupes abéliens simples.

**Exercice 5.** Montrer qu'un groupe abélien non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  pour un certain nombre premier  $p$ .

**Exercice 6.** Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes finis dont les ordres sont premiers entre eux. Que dire des morphismes de  $G_1$  dans  $G_2$  ? Soient  $G = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  et  $f$  un morphisme de  $G$  dans  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ . Démontrer que la composante de  $f$  sur  $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$  est nulle. A quelle condition  $f$  se factorise-t-il par un morphisme de  $G$  dans  $\mathbf{Z}$  ?

**Exercice 7.**

- Exprimer les groupes suivants comme produits directs de cycliques primaires :  $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$ .
- $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$  est un groupe d'ordre  $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ . Quel est l'ordre des composantes cycliques primaires que vous trouvez ?
- Comparer la décomposition de  $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/30\mathbf{Z}$  en  $p$ -groupes et en  $p$ -groupes cycliques.

**Exercice 8.** Donner la liste complète des groupes abéliens d'ordre 360 (à isomorphisme près), en précisant :

- la décomposition en groupes cycliques primaires (dont les ordres sont appelés les "diviseurs élémentaires" du groupe),
- la suite des "facteurs invariants" (nombres dont chacun divise le suivant et tels que le groupe soit isomorphe au produit des groupes cycliques ayant pour ordres ces nombres).

**Exercice 9.** Combien existe-t-il de (classes d'isomorphisme de) groupes abéliens d'ordre 900 ?

**Exercice 10.**

- Déterminer le nombre de sous-groupes d'ordre 3 de  $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ .
- Déterminer le nombre de sous-groupes d'ordre 2 de  $\mathbf{Z}/60\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

**Exercice 11.** Soit  $G$  un groupe abélien d'ordre  $n$ . Montrer que pour tout diviseur  $d$  de  $n$ ,  $G$  possède un sous-groupe d'ordre  $d$ .

**Exercice 12.** Soit  $G$  "le" groupe abélien de type  $(2, 2^3, 5, 5^2, 5^4, 7^2, 7^3)$  (i.e. dont les diviseurs élémentaires sont ces nombres). Pour chacun des types suivant, dire si  $G$  possède un sous-groupe de ce type :

$$(2, 2, 5^2, 7, 7), (2, 2^2, 5^2, 5^2, 7^2, 7^3) (2^2, 2^2, 5^2, 5^2, 7^2, 7^3) (2^3, 5^4, 7^3).$$