TD 4: Plan affine euclidien, sous-espaces affines, applications affines

Exercice 1 Soit E un plan vectoriel euclidien. Montrer le théorème de Pythagore :

$$\forall x, y \in E,\ x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2.$$

Exercice 2 Soit $\mathcal{E}$ un plan affine et $\mathcal{F}$ une partie non-vide de $\mathcal{E}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ ssi tout barycentre de points pondérés de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.

Exercice 3 Soit $\mathcal{E}$ un plan affine.

1. Montrer que, par tout point de $\mathcal{E}$, il passe une unique droite de direction donnée.
2. Montrer que par deux points, il passe une et une seule droite.

Exercice 4 Soient $\mathcal{E}$ un plan affine et $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ quatre points distincts. On dit que (A, B, C, D) est un *parallélogramme* si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Montrer que (A, B, C, D) est un parallélogramme ssi $\{A, C\}$ et $\{B, D\}$ ont même milieu.

Exercice 5 Montrer que l'ensemble :

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}.$$

est un espace affine. Quel est son espace vectoriel associé ?

Exercice 6 Soient $\mathcal{E}$ un plan affine et A, B deux points distincts de $\mathcal{E}$. Déterminer l'ensemble des $M \in \mathcal{E}$ tels que $d(A, M) = d(B, M)$.

Exercice 7 Montrer que $f \in Aff(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est une translation ssi $\overrightarrow{f} = id_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$.

Exercice 8 Soient $\mathcal{E}$ un plan affine et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{G}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ soit un supplémentaire de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

1. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe $M' \in \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{F} \cap (M + \overrightarrow{\mathcal{G}}) = \{M'\}$.
2. Montrer que l'application suivante :

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{E} &\to \mathcal{F} \\ M &\mapsto M' \end{aligned}$$

   est une application bien définie et affine. On appelle π la *projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$*.
3. Montrer que $f \in Aff(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est une projection ssi $f \circ f = f$.

Exercice 9 Soit E un plan affine. Nous allons montrer le théorème de Thalès.
Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ trois droites parallèles distinctes et $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites telles que $\overrightarrow{\mathcal{D}} \not\subset \overrightarrow{\mathcal{D}}_1$ et $\overrightarrow{\mathcal{D}}' \not\subset \overrightarrow{\mathcal{D}}_1$.
Montrer que :

1. $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_i = \{M_i\}, i \in \{1, 2, 3\}$.
2. $\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}_i = \{M_i'\}, i \in \{1, 2, 3\}$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = \lambda\overrightarrow{M_1M_3}$, alors $\overrightarrow{M_1'M_2'} = \lambda\overrightarrow{M_1'M_3'}$.

Exercice 10 On garde les hypothèses et notations de l'Exercice 8. Pour $M \in \mathcal{E}$, on note :

$$s(M) = M + 2\overrightarrow{M\pi(M)}.$$

1. Montrer que s est une application affine appelée la *symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$*.
2. Montrer que $f \in Aff(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ est une symétrie ssi $f \circ f = id_{\mathcal{E}}$.

Exercice 11 Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{K})$ l'ensemble des fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) de la forme :

$$\frac{aX+b}{cX+d},$$

où $ad - bc \neq 0$.
Montrer que c'est un groupe isomorphe à $GL_2(\mathbb{K})/\mathbb{K}^*$, on l'appelle le *groupe des homographies*.

Exercice 12 Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, montrer que :

$$GA(\mathcal{E}) \simeq \overrightarrow{\mathcal{E}} \rtimes GL(\overrightarrow{\mathcal{E}}) \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes GL_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 13 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 2$. Montrer que, dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des racines de P' est contenu dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P (Théorème de Lucas).