Groupes symétriques, produits semi-directs et théorèmes de Sylow

Exercice 1. Dans S_4, soit N le *"sous-groupe-distingué-engendré-par"* (cf feuille 2 exercice 11) la permutation $(12)(34)$.

a) Identifier sa structure.

b) Montrer que N est inclus dans A_4 et en déduire que A_4 n'est pas un groupe simple.

c) Montrer que $S_4/N \simeq S_3$ et $A_4/N \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Exercice 2. Démontrer que :

a) dans A_n, les produits de deux transpositions de supports disjoints sont conjugués (pour $n \geq 4$),

b) dans A_5 et A_6, les 5-cycles se répartissent en deux classes de conjugaison,

c) dans A_n, les produits de deux 3-cycles de supports disjoints sont conjugués (pour $n \geq 6$).

Exercice 3.

a) Si $n \geq 5$, démontrer que le seul sous-groupe distingué et propre de S_n est A_n.

b) En déduire que si $n \geq 5$, S_n est non résoluble (i.e. : il n'existe pas de suite décroissante de sous-groupes $S_n = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = \{e\}$ telle que chacun soit distingué dans le précédent avec quotient abélien).

c) Soient $P(X) = X^5 - 3X - 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ ses racines dans $\mathbf{C}$, $k = \mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_5)$, G le groupe des automorphismes du corps k. On pourra admettre (ou démontrer) que P est irréductible sur $\mathbf{Q}$ (si bien que G agit transitivement sur $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_5\}$) et que P possède exactement 3 racines réelles (si bien que la conjugaison, qui appartient à G, agit sur les 5 racines comme une transposition). En déduire que G est isomorphe à S_5, donc non résoluble (le théorème d'Abel dit qu'alors, l'équation $x^5 - 3x - 1 = 0$ n'est pas "résoluble par radicaux").

Exercice 4.

a) Montrer que le produit direct est un cas particulier de produit semi-direct.

b) Montrer qu'un produit semi-direct n'est jamais commutatif, sauf lorsque c'est un produit direct de deux groupes commutatifs.

Exercice 5. Démontrer que S_n est un produit semi-direct de A_n par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 6. Soit G un groupe d'ordre pq avec p et q premiers, $p < q$.

a) Montrer que G a un seul sous-groupe d'ordre q. En déduire que G est un produit semi-direct.

b) Montrer que si q n'est pas congru à 1 modulo p alors G est abélien, et même cyclique.

c) Montrer que si $p = 2$, G est cyclique ou diédral.

Exercice 7. Soit p un nombre premier. Le but de cet exercice est de montrer que tout groupe d'ordre p^2 est isomorphe soit à $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$, soit à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

a) Soient G un groupe et $Z(G)$ son centre. Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique alors G est abélien

b) G opérant sur lui-même par conjugaison, montrer en utilisant l'équation des classes que si $|G| = p^r$ alors $Z(G)$ n'est pas réduit au neutre.

c) Supposons désormais que $|G| = p^2$. Montrer que $|G/Z(G)| = 1$ ou p. En déduire que G est abélien.

d) Si de plus G n'a pas d'élément d'ordre p^2, montrer qu'il existe dans G au moins deux sous-groupes d'ordre p distincts, H et K, et que G est isomorphe à $H \times K$. Conclure.

Exercice 8. Soit G un groupe d'ordre $p^r q^s$ avec p, q premiers distincts et $r, s \in \{1, 2\}$ t.q. $p \nmid q^s - 1$ et $q \nmid p^r - 1$. Montrer que G est abélien. (exemple : $|G| = 45$)

Exercice 9. Soit G d'ordre mp^n avec p premier $> m$. Montrer que G n'est pas simple. (exemples : $|G| = 20, 28$). Généraliser ce résultat au cas $|G| = mp^n$ (avec p premier ne divisant pas m) sous l'hypothèse : "le seul diviseur d de m pour lequel $p|d - 1$ est $d = 1$". (exemple : $|G| = 200$)

Exercice 10. Soit G d'ordre $2^r p$ avec p premier impair $\geq 2^r - 1$. Montrer que G n'est pas simple (exemples : $|G| = 12, 56$). (Remarque : lorsque $p \geq$ (donc $>$) 2^r, on retrouve un cas particulier de "G d'ordre mp^n avec p premier $> m$", mais pour $p = 2^r - 1$ c'est un nouveau résultat).