TD 3: Groupe symétrique, produit semi-direct

Exercice 1 Ecrire les permutations suivantes en cycles à supports disjoints puis donner leur signature.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 8 & 7 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} ;$$

$$(124)(352)(163)(46).$$

Exercice 2 Soit G un groupe, montrer qu'il est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(G)$.

Exercice 3 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la relation :

$$i \sim_\sigma j \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ i = \sigma^k(j).$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence et décrire une classe.

Exercice 4 Montrer que deux cycles de $\mathfrak{S}_n$ de même longueur sont conjugués.

Exercice 5 Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par :

1. les transpositions ;
2. $(1i), 2 \leqslant i \leqslant n$;
3. $(i\ \ i+1), 1 \leqslant i \leqslant n-1$;
4. (12) et $(12...n)$.

Exercice 6 Montrer que $Z(\mathfrak{S}_n) = \{id\}, \forall\, n \geqslant 3$.

Exercice 7

1. Décrire tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$.
2. Faire sa table de composition.
3. Décrire $\mathfrak{A}_3$.
4. Soient $s = (12)$ et $r = (123)$, montrer que $s^2 = id$, $r^3 = id$, $srs = r^2$.
5. Montrer que $\mathfrak{A}_3 = \langle r \rangle$ et $\mathfrak{S}_3 = \langle s, r \rangle$.
6. Faire la liste de tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 8 Montrer qu'un groupe d'ordre 6 est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ou $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 9 On va décrire l'ensemble des sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$.

1. En utilisant la décomposition en cycles à supports disjoints, décrire les éléments d'ordre 2 de $\mathfrak{A}_4$.
2. En utilisant la décomposition en cycles à supports disjoints, décrire les éléments d'ordre 3 de $\mathfrak{A}_4$.
3. Montrer qu'il n'y a pas de 4-cycles dans $\mathfrak{A}_4$. En déduire qu'il n'y a pas de sous-groupe cyclique d'ordre 4 dans $\mathfrak{A}_4$.
4. Montrer, en utilisant 1., qu'il n'y a qu'un seul sous-groupe d'ordre 4 dans $\mathfrak{A}_4$.
5. Montrer que ce sous-groupe d'ordre 4 est $D(\mathfrak{A}_4)$.
6. Soit H un sous-groupe d'ordre 6, montrer que $D(\mathfrak{A}_4) \subset H$. En déduire qu'il n'y a pas de sous-groupe d'ordre 6 dans $\mathfrak{A}_4$.
7. Soit H un sous-groupe d'ordre 3, montrer que $N_{\mathfrak{A}_4}(H) = H$, en déduire que le normalisateur d'un sous-groupe n'est pas un sous-groupe normal.

Exercice 10 Soit D_n le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par :

$$r = (12...n),$$

et

$$s = \begin{cases} \prod_{i=2}^{n/2} (i\; n+2-i) & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ \prod_{i=2}^{(n+1)/2} (i\; n+2-i) & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$$

appelé *groupe diédral*.

1. Montrer que $s^2 = id$, $r^n = id$, $srs = r^{n-1}$, $sr^ks = r^{n-k}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.
2. Décrire tous les éléments de D_n, quel est son cardinal ? Est-il commutatif ? Montrer que $D_3 = \mathfrak{S}_3$.
3. Montrer que $\langle r \rangle \lhd D_n$.
4. En déduire que $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
5. Montrer que $D_3 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On verra en géométrie que D_n peut être interprété comme le groupe des isométries vectorielles conservant un polygone régulier convexe à n côtés.

Exercice 11 Montrer que $\mathfrak{S}_n \simeq \mathfrak{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 12 Soit $GA(\mathbb{R}) = \{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $(GA(\mathbb{R}), \circ)$ est un groupe appelé *groupe affine de* $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $GA(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \rtimes_\alpha GL(\mathbb{R})$ où $\alpha : (x, u) \mapsto u(x)$.