TD 2: Relations d'équivalence, sous-groupes distingués, quotients

Exercice 1 Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence et identifier l'ensemble quotient :

1. Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$.
2. Sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $(p, q) \sim (p', q') \Leftrightarrow pq' = qp'$.
3. Sur $\mathbb{Z}$, $k \sim_n k' \Leftrightarrow k \equiv k'[n]$ (k et k' ont le même reste dans la division euclidienne par n).
   Montrer que cette relation d'équivalence est compatible avec la somme et le produit de $\mathbb{Z}$.
4. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G, $x \sim_H y \Leftrightarrow \exists\, h \in H,\ x = yh \Leftrightarrow y^{-1}x \in H$.

Exercice 2 Montrer que tout sous-groupe d'indice 2 est distingué.

Exercice 3 Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G tels que :

$$H \lhd G,\ K \lhd G,\ G = HK,\ H \cap K = \{e\}.$$

Montrer que $G \simeq H \times K$.

Exercice 4 Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes distingués tels que $K \subset H$, montrer que :

$$(G/K)/(H/K) \simeq G/H.$$

Exercice 5 Montrer que tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Décrire l'ensemble des générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ puis décrire $Aut(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 6 Montrer le Théorème des restes chinois :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \Leftrightarrow pgcd(m, n) = 1.$$

Exercice 7 Montrer qu'un groupe est d'ordre premier ssi il est cyclique et simple.

Exercice 8 Montrer qu'un groupe d'ordre 4 est soit isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ soit à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (groupe de Klein).

Exercice 9 Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On appelle *normalisateur de H dans G* l'ensemble :

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

1. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $H \lhd G$ ssi $N_G(H) = G$.
3. Montrer que H est un sous-groupe normal de $N_G(H)$.
4. Montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G ayant cette propriété.
5. $N_G(H)$ est-il un sous-groupe normal de G ?

Exercice 10 Montrer que $\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Exercice 11 Soit G un groupe, on suppose que $G/Z(G)$ est cyclique. Montrer que G est abélien.

Exercice 12 Soient G un groupe fini et $s : G \to G$ un morphisme involutif (c'est-à-dire tel que $s \circ s = id$). On suppose de plus que e est le seul point fixe de s.

1. Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}s(x)$ est injective. En déduire que $\forall x \in G, s(x) = x^{-1}$, puis que G est commutatif.
2. Montrer que l'ordre de G est impair.