Chapitre 1 : Correction des Travaux dirigés

1. Soit $v_n = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$ la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, et de premier terme 1.
   (a) On utilise la formule de l'exercice 9.2 du cours, avec $a = 1$ et $b = q$.
   (b) Puisque $|q| < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. D'après les règles algébriques sur les sommes et quotients de suites convergentes, la suite (v_n) est convergente et sa limite est $1/(1-q)$.
   (c) $\sum_{i=0}^{\infty}(10^{-3})^i = \frac{1}{1-10^{-3}} = \frac{1}{0{,}999} = \frac{1000}{999}$.

2. (a) Variations de la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{3}\exp(u_n)$, lorsque $u_0 = 0$:
   On a $u_1 = \frac{1}{3} > u_0$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} > u_n$:
   - (initialisation) La propriété est vraie pour $n = 0$ puisqu'on vient de vérifier $u_1 > u_0$.
   - (hérédité) Supposons que pour un certain n on ait : $u_{n+1} > u_n$. Montrons qu'alors $u_{n+2} > u_{n+1}$. En effet, $f(x) = \frac{1}{3}\exp(x)$ étant une fonction strictement croissante, on a :
   $$u_{n+1} > u_n \Rightarrow f(u_{n+1}) > f(u_n), \text{ d'où } u_{n+2} > u_{n+1}.$$
   La propriété est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à la valeur d'initialisation, donc ici pour $n \geq 0$.

   Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = \frac{e}{3} < u_0$. On montre la décroissante stricte de la même manière : on utilise que f étant croissante elle conserve les inégalités.

   Remarque : ce raisonnement prouve que toute suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante est une suite monotone, le type de monotonie (croissance ou décroissance) étant déterminé par l'inégalité entre les deux premiers termes de la suite.

   (b) Convergence de ces suites.
   Montrons par récurrence que dans le premier cas, (u_n) est majorée par 1 : $\forall n \geq 0, u_n < 1$.
   - (initialisation) La propriété est vraie pour $n = 0$: $u_0 = 0 < 1$.
   - (hérédité) Supposons que pour un certain n on ait : $u_n < 1$. Montrons qu'alors $u_{n+1} < 1$: $u_{n+1} = f(u_n) < f(1)$ car f est croissante et $f(1) = \frac{e}{3} < 1$.
   La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 0$.
   Puisque (u_n) est croissante, et majorée par 1, elle est convergente et sa limite l (inconnue) vérifie $l \leq 1$.

   Remarque : on peut parfois calculer la valeur de la limite en utilisant le résultat de l'exercice 7, question (c) : l est solution de $f(l) = l$. Hélas, dans le cas présent, on ne peut résoudre explicitement cette équation...

3. On considère la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^3}(\sum_{i=1}^n i^2)$.

   (a) Montrons la formule : $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ par récurrence :
   - (initialisation) La propriété est vraie pour $n = 1$: $1^2 = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3$.
   - (hérédité) Supposons que pour un certain n on ait : $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ("hypothèse de récurrence"). Montrons qu'alors cette propriété reste vraie à l'ordre $n+1$ c'est-à-dire, montrons : $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$. En effet, d'après l'hypothèse de récurrence, le membre de gauche de l'égalité vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)[(n(2n+1) + 6(n+1)] \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6).\end{aligned}$$

   Or le membre de droite vaut

$$\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6)$$

   d'où l'égalité cherchée. La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

   (b) On a

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6n^3}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6n^3}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

   qui tend vers 1/3 d'après les théorèmes sur les sommes de suites convergentes.

4. *Une définition du nombre e.*

   (a) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc (a_n) est croissante.

$$\begin{aligned}b_{n+1} - b_n &= (1 + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!}) \\ &- (1 + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0\end{aligned}$$

   donc (b_n) est décroissante.
   $(b_n - a_n) = \frac{1}{n \cdot n!}$ est positif et tend vers 0, puisque le dénominateur tend vers l'infini. Les deux suites sont donc adjacentes. On sait qu'alors elles convergent et ont la même limite, qu'on note ici e (il s'agit bien du e de $\exp(1)$).

   (b) $a_5 = 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! = 2,716666....$
   On peut majorer l'erreur $(e - a_5)$ par $b_5 - a_5 = 1/(5 \times 5!) = 1/600 = 0,001666...$

5. *Approximation décimale d'un nombre réel.* Un nombre décimal est un nombre rationnel de la forme $p/10^n$. Exemple : $1,3333 = 13333/10^4$.

   (a) Démontrer que pour tout réel x on a : $10[x] \leq [10x] \leq 10[x] + 9$:
   Puisque $[x] \leq x < [x] + 1$, on a $10[x] \leq 10x < 10[x] + 10$. Donc :
   . $10[x]$ est un entier inférieur ou égal à $10x$. $[10x]$ étant le plus grand entier inférieur ou égal à $10x$, on a : $10[x] \leq [10x]$.
   . $10[x] + 10$ est un entier strictement supérieur à $10x$. $[10x] + 1$ étant le plus petit entier strictement supérieur à $10x$, on a : $[10x] + 1 \leq 10[x] + 10$, d'où $[10x] \leq 10[x] + 9$.

   (b) Pour $n \geq 0$, on pose : $p_n = [x \times 10^n]$, $d_n = p_n \cdot 10^{-n}$ et $e_n = (p_n + 1) \cdot 10^{-n}$. Lorsque $x = \sqrt{2}$,
   $p_0 = [\sqrt{2}] = 1$, $d_0 = p_0 = 1$, $e_0 = p_0 + 1 = 2$.
   $p_1 = [10\sqrt{2}] = 14$, $d_1 = p_1 \times 10^{-1} = 1,4$, $e_1 = (p_1 + 1) \times 10^{-1} = 1,5$.
   $p_2 = [100\sqrt{2}] = 141$, $d_2 = p_2 \times 10^{-2} = 1,41$, $e_2 = (p_2 + 1) \times 10^{-2} = 1,42$.
   Ces suites (d_n) et (e_n) semblent encadrer $\sqrt{2}$ en donnant les valeurs décimales tronquées à l'ordre n par défaut et par excès, ce qu'on va vérifier :

   (c) Vérifier que $d_n \leq x < e_n$ et montrer que les deux suites (d_n) et (e_n) sont des suites de nombres décimaux adjacentes qui convergent vers x :
   On a : $d_n = [x \times 10^n] \times 10^{-n} \leq x \times 10^n \times 10^{-n} = x$.
   On a : $e_n = ([x \times 10^n] + 1) \times 10^{-n} > x \times 10^n \times 10^{-n} = x$.
   On a :
   $$d_{n+1} - d_n = \frac{[x \times 10^{n+1}]}{10^{n+1}} - \frac{[x \times 10^n]}{10^n} = \frac{[x \times 10^{n+1}] - 10[x \times 10^n]}{10^{n+1}} \geq 0$$
   d'après la première inégalité de la question (a) utilisée en remplaçant x par $x \times 10^n$.
   (d_n) est donc croissante.
   On a :
   $$e_{n+1} - e_n = \frac{[x \times 10^{n+1}] + 1}{10^{n+1}} - \frac{[x \times 10^n] + 1}{10^n} = \frac{[x \times 10^{n+1}] - 10[x \times 10^n] - 9}{10^{n+1}} \leq 0$$
   d'après la seconde inégalité de la question (a) utilisée en remplaçant x par $x \times 10^n$.
   (e_n) est donc décroissante.
   On a : $e_n - d_n = 10^{-n}$, et donc $\lim_n(e_n - d_n) = 0$.
   Ces deux suites sont donc adjacentes. On sait qu'elles convergent vers une même limite qui est ici x puisque $d_n \leq x < e_n$ pour tout n.

6. *Approximation décimale d'un nombre rationnel.*

   (a) En effectuant la division, donner les 12 premiers termes de la suite décimale illimitée par défaut du rationnel $x = 13/7$.
   On obtient : 1,857142857142857142857142 86...
   La suite des 6 décimales 857142 semble se répèter à l'infini. En effet, dans la division par 7, si la division ne s'arrête pas, les restes successifs ne peuvent prendre que les valeurs de 1 à 6. Nécessairement on retrouvera donc après au plus 6 divisions, un reste déjà rencontré. La suite de la division se répète alors à l'identique.

(b) Réciproquement, on considère un réel x dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang : 0,72486486486486...
On a :

$$\begin{array}{rcl} 0,72486486486486... & = & 0,72 \\ & + & 0,00486 \\ & + & 0,00000486 \\ & + & 0,00000000486 \\ & + & \ldots \\ & = & 0,72 + 0,00486(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + 10^{-9} + \cdots) \end{array}$$

donc, d'après l'exercice 1, question (c),

$$\begin{array}{rcl} 0,72486486486486... & = & \dfrac{72}{100} + \dfrac{486}{10^5} \times \dfrac{1000}{999} \\ & = & \dfrac{72}{100} + \dfrac{486}{99900} = \dfrac{(72 \times 999) + 486}{99900} = \dfrac{72414}{99900}. \end{array}$$

On peut vérifier avec la calculatrice que le développement décimal de ce rationnel est bien celui dont on est parti.

7. *Approximation d'une racine carrée : méthode de Héron d'Alexandrie.*
Soit a un nombre réel positif, et u_0 un nombre entier plus grand que $\sqrt{a}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.
   (a) Montrer que f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$:
   $f(y) - f(x) = \frac{1}{2}(y - x + (\frac{a}{y} - \frac{a}{x})) = \frac{1}{2}[(y - x) + \frac{ay-ax}{xy}] = \frac{1}{2}(y - x)(1 + \frac{a}{xy})$. Or puisque x et y sont supérieurs à $\sqrt{a}$ (l'un au moins strictement), $xy > a$ et $\frac{a}{xy} < 1$ d'où $(1 + \frac{a}{xy}) > 0$. On en déduit que $f(y) - f(x)$ a le même signe que $(y - x)$ et donc que f est strictement croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$.
   On peut aussi étudier le signe de la dérivée : $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2}) = \frac{x^2-a}{2x^2}$. Le numérateur est strictement positif pour $x > \sqrt{a}$ et le dénominateur est toujours positif.
   (b) Démontrer par récurrence la propriété : $\sqrt{a} < u_n < u_{n-1}$. En déduire que (u_n) est convergente.
   - Vérifions la propriété pour $n = 1$: Puisque $u_0 > \sqrt{a}$ et f est strictement croissante, $u_1 = f(u_0) > f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. D'autre part,
   $u_1 - u_0 = \frac{1}{2}(u_0 + \frac{a}{u_0}) - u_0 = \frac{a}{2u_0} - \frac{u_0}{2} = \frac{a-u_0^2}{2u_0}$ qui est négatif puisque $u_0 > \sqrt{a}$.
   On a donc $\sqrt{a} < u_1 < u_0$.
   - supposons que pour un certain n on ait : $\sqrt{a} < u_n < u_{n-1}$, alors en appliquant f et en utilisant la croissance de f on obtient : $f(\sqrt{a}) < f(u_n) < f(u_{n-1})$ c'est-à-dire : $\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n$.
   La propriété est donc démontrée pour tout $n \geq 1$.
   La suite (u_n) étant décroissante minorée par $\sqrt{a}$, elle converge vers une limite l (inconnue) qui vérifie $l \geq \sqrt{a}$.
   (c) Démontrer que la limite l de (u_n) vérifie : $f(l) = l$ et en déduire que $l = \sqrt{a}$:
   Le raisonnement qui suit est très général :

Puisque f est continue, si (u_n) tend vers l, $f(u_n)$ tend vers $f(l)$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$ est encore la même suite "décalée" d'un indice ce qui ne change pas la limite : (u_{n+1}) tend aussi vers l. On a donc $f(l) = l$ et on obtient la valeur l en résolvant l'équation $f(x) = x$. Ici cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) = x &\Leftrightarrow \frac{x^2 + a}{x} = 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 + a = 2x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = a \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a} \end{aligned}$$

et puisqu'on a vu que la limite vérifie $l \geq \sqrt{a}$, nécessairement $l = \sqrt{a}$.

(d) Vérifier l'égalité $(u_{n+1} - \sqrt{a}) = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$:

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n} - \sqrt{a}) = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}.$$

En déduire : $(u_{n+1} - \sqrt{a}) \leq (u_n - \sqrt{a})^2$:
Si $\sqrt{a} > 1/2$ (condition à rajouter dans l'énoncé), $2u_n > 2\sqrt{a} > 1$ d'où
$(u_{n+1} - \sqrt{a}) \leq (u_n - \sqrt{a})^2$.
L'erreur à l'étape $n + 1$ est celle de l'étape n élevée au carré. Supposons qu'on ait obtenu un résultat approché avec une décimale exacte, c'est-à-dire une erreur inférieure à 10^{-1}. A l'étape suivante l'erreur est majorée par $(10^{-1})^2 = 10^{-2}$ (2 décimales exactes), puis $(10^{-2})^2 = 10^{-4}$ (4 décimales exactes), puis $(10^{-4})^2 = 10^{-8}$ (8 décimales exactes), etc...

(e) Ecrire une instruction Maple qui permet de calculer une approximation de $\sqrt{2}$ avec 32 décimales exactes :
D'après ce qui précède, si on part d'un intervalle de longueur 0,1 autour de $\sqrt{a}$, il suffit de 5 itérations de f pour obtenir la précision de 10^{-32}. La procédure utilisera donc une boucle "for" qui sera écrite et testée en T.P.