Algèbre et Géométrie

Devoir à rendre pour le 17 avril 2012.

Dans tout le problème, $\mathcal{E}$ est un plan affine euclidien et on note E son espace vectoriel associé. On note $Is(\mathcal{E})$ le groupe des isométries affines de $\mathcal{E}$ et T le sous-groupe des translations. On note $O(E)$ le groupe des isométries de E. On note $L : f \mapsto L(f)$ l'homomorphisme "partie linéaire" qui associe à une isométrie affine, sa partie linéaire.

Si $\mathcal{D}$ est une droite affine de $\mathcal{E}$, $s_{\mathcal{D}}$ désigne la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$. Si A est un point de $\mathcal{E}$, s_A désigne la symétrie par rapport à A. Si $u \in E$ est un vecteur non nul, σ_u désigne la symétrie vectorielle orthogonale d'axe la droite engendrée par le vecteur u et t_u la translation de vecteur u.

Si G est un groupe et si $\mathcal{P}$ est un sous-ensemble de G, on note $\langle \mathcal{P} \rangle$ le sous-groupe de G engendré par $\mathcal{P}$.

Un *groupe de frises* est un sous-groupe G de $Is(\mathcal{E})$ tel que $G^T = G \cap T$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des groupes de frises.

1) a) Soit $g \in Is(\mathcal{E})$ une isométrie de partie linéaire $L(g)$ et soit t_u une translation de vecteur u. Montrer que $g \circ t_u \circ g^{-1} = t_{L(g)(u)}$.

b) Soit $v \in E$ un vecteur non-nul et soit g une isométrie de partie linéaire σ_v. Montrer que g est la composée $t \circ s_{\mathcal{D}}$ d'une symétrie $s_{\mathcal{D}}$ où $\mathcal{D}$ est une droite dont un vecteur directeur est un multiple de v et d'une translation t de vecteur colinéaire à v.

Dans la suite du problème, on se donne un groupe de frises G.

2) Montrer qu'il existe un vecteur u bien défini au signe près tel que le groupe G^T est engendré par la translation t_u.

Soit u' un vecteur orthogonal à u. Soit H le sous-groupe de $O(E)$ engendré par les symétries vectorielles σ_u et $\sigma_{u'}$.

3) a) Montrer que les sous-groupes de H sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\langle \sigma_u \rangle$, $\langle \sigma_{u'} \rangle$, $\langle -\mathrm{Id} \rangle$ et H.

b) Montrer que $L(G)$ est contenu dans H (on pourra commencer par montrer en utilisant la question 1 a) que pour tout $g \in G$, $L(g)(u) = \pm u$; on en déduira que $L(g)(u') = \pm u'$.)

c) Montrer que si H' est un sous-groupe de H, alors $L^{-1}(H') \cap G$ est un groupe de frises.

4) On suppose que $-\mathrm{Id} \in L(G)$. Soit $G' = L^{-1}(\langle -\mathrm{Id} \rangle) \cap G$.

a) Montrer qu'il existe un point $A \in \mathcal{E}$ tel que G' contient la symétrie s_A et que $G' = \langle s_A, t_u \rangle$.

b) Soit $B \in \mathcal{E}$ le point tel que $B - A = \frac{1}{2}u$. Montrer que $s_B \in G'$ et que $G' = \langle s_A, s_B \rangle$. (On pourra considérer l'élement $t_u \circ s_A$).

5) On suppose que $\sigma_{u'} \in L(G)$. Soit $G' = L^{-1}(\langle \sigma_{u'} \rangle) \cap G$.

a) Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}'$ de direction u' telle que $s_{\mathcal{D}'} \in G'$ (on pourra utiliser la question 1 b)).

b) Montrer que $G' = \langle s_{\mathcal{D}'}, t_u \rangle$.

c) Soit $\mathcal{D}''$ la droite $t_{\frac{u}{2}}\mathcal{D}'$. Montrer que $G' = \langle s_{\mathcal{D}'}, s_{\mathcal{D}''} \rangle$.

6) On suppose que $\sigma_u \in L(G)$. Soit $G' = L^{-1}(\langle \sigma_u \rangle) \cap G$.

a) Montrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ telle que tous les éléments de G' de partie linéaire σ_u s'écrivent sous la forme $t_v \circ s_{\mathcal{D}}$ où le vecteur v vérifie : $2v \in \mathbb{Z}u$ (on pourra utiliser la question 1 b)). Montrer plus précisément, que ou bien, pour tous les éléments de G' de partie linéaire σ_u, on a $v \in \mathbb{Z}u$, ou bien pour tous les éléments de partie linéaire σ_u, on a : $v \in (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})u$.

b) Déduire de la question précédente que ou bien $G' = \langle s_{\mathcal{D}}, t_u \rangle$, ou bien $G' = \langle t_{u/2} \circ s_{\mathcal{D}} \rangle$.

c) Montrer que G' est isomorphe à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ dans le premier cas, et à $\mathbb{Z}$ dans le second.

7) (BONUS) On suppose que $L(G) = H$. En particulier, d'après la question 4 b), le sous-groupe $L^{-1}(\langle -\mathrm{Id} \rangle) \cap G$ de G est engendré par deux symétries s_A et s_B telles que $B = A + \frac{1}{2}u$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par A et B.

a) Montrer que G contient une symétrie $s_{\mathcal{D}'}$ où la droite $\mathcal{D}'$ a pour vecteur directeur un multiple de u'. Montrer que $G = \langle s_{\mathcal{D}'}, s_A, s_B \rangle$.

b) Montrer qu'on peut choisir de manière unique la droite $\mathcal{D}'$ de sorte qu'elle passe par un point du segment $[AB[$ ouvert en B (on pourra d'abord remarquer que si $\mathcal{D}'$ passe par le point $A + x\dfrac{u}{2}$ avec $x \in \mathbb{R}$, et si $n \in \mathbb{Z}$, alors $(t_u)^n \circ s_{\mathcal{D}'}$ est une symétrie par rapport à une droite passant par le point $(x+n)\dfrac{u}{2}$).

c) Montrer que la droite $\mathcal{D}'$ dans l'énoncé précédent passe ou bien par A, ou bien par $A + \frac{1}{4}u$.

d) Montrer que dans le premier cas de la question c), on a : $G = \langle s_{\mathcal{D}}, s_A, s_B \rangle$ et que dans le second cas, on a : $G = \langle s_{\mathcal{D}'}, s_A \rangle$.