Devoir Algèbre et Géométrie

Ce devoir est à rendre pour le 22 février 2012.

Dans tout le devoir on considère $n \geq 3$ et note $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique, $\mathfrak{A}_n$ le groupe alterné.

1) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et soit $(i_1 \cdots i_k) \in \mathfrak{A}_n$ un k-cycle. Calculer $\sigma(i_1 \cdots i_k)\sigma^{-1}$.

2) En déduire que si $i \neq j$, on peut écrire (ij) à partir de $(1i)$ et $(1j)$.

3) En déduire que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les produits $(1i)(1j)$ avec $i \neq j$.

4) Calculer $(1i)(1j)$.

5) En déduire que l'on peut écrire $(1i)(1j)$ à partir des cycles $(12i)$ et $(1j2)$.

6) Calculer $(abc)^2$.

7) En déduire que l'on peut écrire $(1i)(1j)$ à partir des cycles $(12i)$ et $(12j)$.

8) En utilisant 1) montrer que pour $i \neq k$, les cycles $(12k)$ et $(1i2)$ sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$, c'est-à-dire qu'il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ telle que $(12k) = \sigma(1i2)\sigma^{-1}$.

9) Montrer que si H est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$ qui contient un 3-cycle de la forme $(12i)$, alors $H = \mathfrak{A}_n$.

10) En déduire que si H est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$ qui contient un 3-cycle, alors $H = \mathfrak{A}_n$.

On suppose dans la suite du devoir que $n \geq 5$.

11) Soit $\sigma = (i_1 \cdots i_l)$ avec $l \geq 4$ et $s = (i_1 i_2 i_3)$. Calculer $\sigma(s\sigma s^{-1})^{-1}$.

12) En déduire que si $u \in \mathfrak{A}_n \setminus \{id\}$ contient dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints un élément de longueur $l \geq 4$, alors $u(sus^{-1})^{-1}$ est un 3-cycle.

13) Montrer que si $u \in \mathfrak{A}_n \setminus \{id\}$ ne contient dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints que des éléments de longueur 2 et 3, alors $u^2 = id$ ou u^2 ne contient que des éléments de longueur 3.

14) On suppose que la décomposition en produit de cycles à supports disjoints de u s'écrit sous la forme : $u = (i_1 i_2 i_3)(i_4 i_5 i_6)v$. Soit $s = (i_1 i_4 i_5)$. Calculer $u(sus^{-1})^{-1}$.

15) On considère à présent un élément u dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints est de la forme $u = (i_1 i_2)(i_3 i_4)v$. Soit $s = (i_3 i_2 i_1)$. Calculer $u(sus^{-1})^{-1}$.

16) On considère à présent un élément dont la décomposition est de la forme $u = (i_1 i_2)(i_3 i_4)$. Soit i_5 différent de i_1, i_2, i_3 et i_4 et soit $s = (i_5 i_4 i_3)$. Calculer $u(sus^{-1})^{-1}$.

17) Montrer que si H est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$ non réduit à l'élément neutre, alors $H = \mathfrak{A}_n$. (On pourra discuter sur la longueur des cycles dans la décomposition d'un élément non nul de H et utiliser les questions 12, 13, 14, 15 et 16)

18) Montrer que $H = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$ pour $n = 4$.

19) Que dire des sous-groupes distingués de $\mathfrak{A}_n$ pour $n = 3$?