Auto-correction du devoir d'Analyse du mardi 23 mars 2010

Partie 1 :	/8
Partie 2 :	/4
Partie 3 :	/4
Partie 4 :	/4
Total :	**/20.**

1. (**8 points**)

   (a) **(0,5)**La fonction f est strictement croissante car on a :

   $$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow x+5 < y+5 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+5} < \sqrt{y+5} \end{aligned}$$

   car la fonction racine carrée est strictement croissante sur son domaine de définition. (On peut aussi montrer que sa dérivée $1/2\sqrt{x+5}$ est strictement positive).

   (b) **(1+1+1)**Montrons par récurrence que (u_n) est strictement croissante : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} > u_n$.
   - Initialisation : $u_1 = f(2) = \sqrt{7} = 2,64\ldots > u_0 = 2$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - Hérédité : supposons que la propriété soit vraie pour un certain n : $u_{n+1} > u_n$. Montrons qu'alors $u_{n+2} > u_{n+1}$. On a $u_{n+2} = f(u_{n+1})$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Puisque f est strictement croissante,

   $$u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_{n+2} = f(u_{n+1}) > f(u_n) = u_{n+1}.$$

   La propriété est donc démontrée pour tout $n \geq 0$.
   On montre de la même manière que (v_n) est décroissante :
   - Initialisation : $v_1 = f(3) = \sqrt{8} = 2,82\ldots < v_0 = 3$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - Hérédité : supposons que la propriété soit vraie pour un certain n : $v_{n+1} < v_n$. Montrons qu'alors $v_{n+2} < v_{n+1}$. On a $v_{n+2} = f(v_{n+1})$ et $v_{n+1} = f(v_n)$. Puisque f est strictement croissante,

   $$v_{n+1} < u_n \Rightarrow v_{n+2} = f(v_{n+1}) < f(v_n) = v_{n+1}.$$

   La propriété est donc démontrée pour tout $n \geq 0$.
   Montrons par récurrence que $u_n \leq v_n$ pour tout n :
   - Initialisation : $u_0 = \sqrt{7} < v_0 = \sqrt{8}$.
   - Hérédité : si $u_n < v_n$ en appliquant f à chaque membre et en utilisant la croissance de f on obtient $u_{n+1} < v_{n+1}$. La propriété est donc démontrée pour tout $n \geq 0$.

(c) **(2)** On a :

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= \sqrt{y+5}-\sqrt{x+5} = \frac{(\sqrt{y+5}-\sqrt{x+5})(\sqrt{y+5}+\sqrt{x+5})}{\sqrt{y+5}+\sqrt{x+5}} \\ &= \frac{(y+5)-(x+5)}{\sqrt{y+5}+\sqrt{x+5}} = \frac{y-x}{\sqrt{y+5}+\sqrt{x+5}}. \end{aligned}$$

Or, si x et y sont dans $[2,3]$, $\sqrt{y+5} > \sqrt{7}$ et $\sqrt{x+5} > \sqrt{7}$ (car $\sqrt{\ }$ est croissante). La fonction inverse est décroissante, $y-x \geq 0$ et $\frac{1}{2\sqrt{7}} = 0,18...$, on a :

$$f(y)-f(x) = \frac{y-x}{\sqrt{y+5}+\sqrt{x+5}} < \frac{y-x}{2\sqrt{7}} < 0,2 \times (y-x).$$

(d) **(1+0,5)** Il reste à voir que $(v_n - u_n)$ tend vers 0. On a $v_1 - u_1 = f(v_0) - f(u_0) < 0,2 \times (v_0 - u_0) = 0,2$. De même, $v_2 - u_2 < 0,2 \times (v_1 - u_1) < (0,2)^2$. Montrons par récurrence que pour tout n, $v_n - u_n < (0,2)^n$:
Initialisation : on vient de voir que la propriété est vraie pour n=0,1 et 2.
Hérédité : si $v_n - u_n < (0,2)^n$, alors d'après la question précédente,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = f(v_n) - f(u_n) < 0,2 \times (v_n - u_n) < 0,2 \times (0,2)^n = (0,2)^{n+1}.$$

On a donc pour tout n : $0 < v_n - u_n < (0,2)^n$. Puisque la suite $(0,2)^n$ tend vers 0 (comme suite géométrique de raison q vérifiant $|q| < 1$), $(v_n - u_n)$ tend aussi vers 0 (théorème de comparaison des suites).

(e) **(0,5+0,5)** $v_3 - u_3 < (0,2)^3 = 0,008$. $u_0 = 2$, $u_1 \simeq 2,645$, $u_2 \simeq 2,765$, $u_3 \simeq 2,786$. On sait donc que l est compris entre $2,786$ et $2,786 + 0,008 = 2,794$. On peut prendre 2,79 comme valeur approchée.

2. **(4 points)** On a $u_2 = u_0 q^2$, et $u_4 = u_0 q^4$.

(a) **(3)** On a donc :

$$u_0(1+q^2) = \frac{13}{27}, \quad u_0^2 \times q^4 = \frac{16}{729} = (\frac{4}{27})^2.$$

La seconde équation équivaut à $u_0 q^2 = \pm\frac{4}{27}$. En quotientant les deux équations, on obtient :

$$\frac{1+q^2}{q^2} = \pm\frac{13}{4}, \text{ d'où } \frac{1+q^2}{q^2} = \frac{13}{4}$$

puisque $\frac{1+q^2}{q^2}$ est toujours positif. Cette denière équation équivaut à

$$1 - \frac{9}{4}q^2 = 0, \text{ d'où } q^2 = \frac{4}{9}, \text{ et } q = \pm\frac{2}{3}.$$

En remplaçant q^2 par sa valeur dans la première équation, on obtient

$$u_0(1+\frac{4}{9}) = \frac{13}{27}, \text{ d'où } u_0\frac{13}{9} = \frac{13}{27} \text{ et } u_0 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}.$$

On obtient donc deux suites géométriques répondant à la question, définies par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{2}{3}$, ou par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $q = -\frac{2}{3}$.

(b) **(1)** On sait que la somme des n premiers termes d'une suite géométrique vaut $u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et que, si $|q|<1$ (ce qui est le cas si $q=\pm\frac{2}{3}$), q^{n+1} tend vers 0 quand n tend vers ∞. La limite cherchée est donc $u_0\frac{1}{1-q}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-2/3}=1 \text{ ou } \frac{1}{3}\times\frac{1}{1+2/3}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}.$$

3. **(4 points)** Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\frac{x}{x^2+\sin x}.$$

(a) **(1+0,5+1)** Puisque $-1\leq \sin x\leq 1$, on a : $x^2-1\leq x^2+\sin x\leq x^2+1$. En passant à l'inverse et en utilisant le fait que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\frac{1}{x^2-1}\geq\frac{1}{x^2+\sin x}.$$

En multipliant par x (qui est ici positif), on obtient $f(x)<\frac{x}{x^2-1}$.
Enfin, si $x>1$, $x^2>1$ et donc $x^2-\sin x>1-1=0$. On a donc $f(x)>0$ pour $x>1$.
On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1/x}=0.$$

D'après le théorème de comparaison des fonctions (connu au lycée sous le nom de "théorème des gendarmes"), on conclut que la limite cherchée est nulle.

(b) **(1+0,5)** On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{0+1}=1.$$

On peut donc prolonger la fonction par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.

4. **(4 points)** On considère la fonction $g:\ x\mapsto 2\sqrt{x}-x$ définie sur l'intervalle $I=[0,1]$.

(a) **(1)** La fonction dérivée de g est $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Or, pour $0\leq x<1$, $\sqrt{x}<\sqrt{1}=1$ (car la fonction racine carrée est croissante). Donc la fonction dérivée est strictement négative sur $]0,1[$, et g est donc strictement décroissante sur $[0,1]$.

(b) **(0,5+0,5)** Puisque $0\leq x\leq 1$, et puisque g est croissante, on a $g(0)\leq g(x)\leq g(1)$ d'où $0\leq g(x)\leq 1$. On a donc $g(I)\subset[0,1]$.
Enfin puisque g est continue sur $[0,1]$ (comme différence de deux fonctions continues), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, toutes les valeurs entre 0 et 1 sont atteintes par g, c'est-à-dire sont dans l'image $g(I)$. On a donc $g(I)\subset[0,1]$.

(c) **(2)** L'application réciproque $g^{-1}:\ J \to I$ est l'application qui à tout y de J associe l'unique solution x de l'équation $g(x) = y$. Résolvons cette équation d'inconnue x (y étant un paramètre) :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} - x = y \quad &\Leftrightarrow \quad 4x - 4x\sqrt{x} + x^2 = y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 4x - 2x(y+x) + x^2 = y^2 \text{ (en remplaçant } 2\sqrt{x} \text{ par } y+x) \\ &\Leftrightarrow \quad -x^2 + 2(2-y)x - y^2 = 0. \end{aligned}$$

On résoud cette équation du second degré :
$\Delta = 4(2-y)^2 - 4(-1)(-y^2) = 4[(2-y)^2 - y^2] = 16(1-y)$ est positif puisque $y \in [0,1]$, et on a $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{1-y}$.
Les solutions sont donc $x = \frac{-2(2-y)\pm 4\sqrt{1-y}}{-2} = 2 - y \pm 2\sqrt{1-y}$. Seule la solution $x = 2 - y - 2\sqrt{1-y}$ appartient à $[0,1]$ (l'autre est supérieure à 1). L'application g^{-1} est donc définie par

$$g^{-1}:\ y \mapsto 2 - y - 2\sqrt{1-y}.$$