S2 : Analyse

Ch. 2 : Etude et approximation locale des fonctions numériques

1 Continuité, théorème des valeurs intermédiaires.

Continuité. Une fonction est dite continue en a si elle est définie en a ($f(a)$ existe) et

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Elle est continue sur un intervalle si elle est continue en tout point a de cet intervalle.

En un point de discontinuité, le graphe de f présente un saut. Le cas le plus fréquent de discontinuité est le cas où la fonction présente une limite à droite en a, une à gauche et ces deux limites sont différentes (ou encore infinies).

Exemple - f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ si $x \geq 0$, et $f(x) = -(x^2 + 1)$ si $x < 0$:

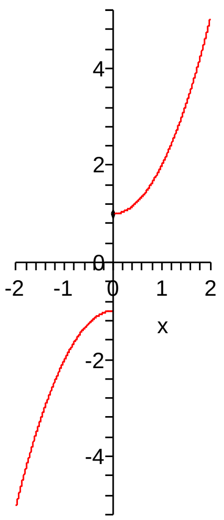

Figure 1 – Une discontinuité en 0 avec limites à droite et à gauche

.

Mais il peut y avoir des discontinuités plus sauvages, sans limite à droite ou à gauche.

Exemple - f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$:

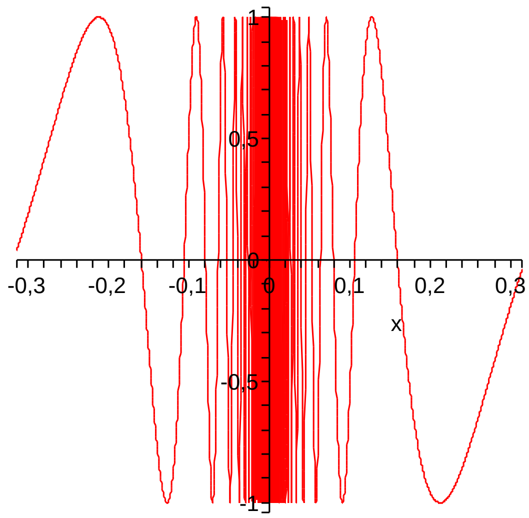

FIGURE 2 – Une discontinuité en 0 sans limites à droite ou à gauche

.

Critères de continuité. D'après les résultats du chapitre 1 sur les limites, la somme et le produit de deux fonctions f et g continues en a est encore une fonction continue en a et, si $g(a) \neq 0$ le quotient f/g est encore continu en a.
La composée de deux fonctions continues est continue.

Exemples de fonctions continues. Puisque $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après ce qui précéde, toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes P/Q) est continue sur son domaine de définition c'est-à-dire en dehors des points où Q s'annule.
Les fonctions usuelles vues au lycée (fonctions trigonométriques, logarithme, exponentielle) sont continues sur leurs domaines de définition.

Exercice 1. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \exp(\frac{\sin x}{x})$.*

1. *Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.*
2. *Peut-on trouver une valeur définissant $f(0)$ qui permette de "prolonger par continuité" f sur $\mathbb{R}$ tout entier ? (c'est-à-dire telle que la fonction prolongée soit continue en 0)*

Nous admettrons le résultat suivant (très utile pour démontrer qu'une fonction est bornée) que nous vérifierons sur un exemple :

Théorème - *Toute fonction* ***continue*** *sur un intervalle* ***fermé*** $[a, b]$ *est bornée (par* m *et* M*) et atteint ses bornes (il existe* c *et* d *tels que* $f(c) = m$ *et* $f(d) = M$*).*

> ***Exercice 2.*** *Vérifier à l'aide des deux questions ci-dessous que les deux hypothèses du théorème sont indispensables :*
>
> 1. *Déterminer l'image de l'intervalle* $[-2, +2]$ *par chacune des 2 fonctions suivantes :* $f(x) = x^2$; $g(x) = 1/x$ *si* $x \neq 0$, *et* $g(0) = 0$. *Est-elle bornée ? Ces bornes sont-elles atteintes ?*
> 2. *Déterminer l'image de l'intervalle* $[-2, +2[$ *par la fonction* $h(x) = 1/(x - 2)$. *Est-elle bornée ?*

Théorème des valeurs intermédiaires. (très utile pour démontrer l'existence de solutions d'une équation) : *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle fermé* $[a, b]$. *Pour toute valeur intermédiaire* d *entre* $f(a)$ *et* $f(b)$, *il existe* c *dans* $[a, b]$ *tel que* $f(c) = d$.

Le théorème des valeurs intermédiaires dit que si f est continue sur $[a, b]$, l'image de $[a, b]$ est non seulement bornée par m et M (avec bornes atteintes) mais est *tout l'intervalle* $[m, M]$ (sans trous) :

> ***Exercice 3.*** *Quelle est l'image de l'intervalle* $[-2, +2]$ *par la fonction* f *de la figure 1 ? Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique-t-il ici ?*

Preuve du théorème par la méthode de dichotomie - On peut supposer qu'on est dans le cas $f(a) \leq f(b)$ (l'autre cas est analogue). Soit d telle que $f(a) \leq d \leq f(b)$. Le principe est de construire une suite d'intervalles emboités $[a_n, b_n]$ tels que (a_n) et (b_n) soient des suites adjacentes vérifiant $f(a_n) \leq d$ et $f(b_n) \geq d$. Leur limite commune donnera la solution c cherchée. On pose :

- $[a_0, b_0] = [a, b]$. Puis, par récurrence :
- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > d$, on pose $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}]$.
- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < d$, on pose $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$.
- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = d$, fin : on pose $c = \frac{a_n+b_n}{2}$.

Clairement (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et $(b_n - a_n)$ tend vers 0 puisque la longueur de l'intervalle est divisée par deux à chaque étape. Soit c leur limite commune. Montrons que c vérifie $f(c) = d$:
- puisque $\lim(a_n) = c$ et f est continue on a (voir ch. 1) : $\lim f(a_n) = f(c)$. De plus, puique la suite $f(a_n)$ est majorée par d, on a $f(c) \leq d$.
- de même puisque $\lim(b_n) = c$, et f est continue on a : $\lim f(b_n) = f(c)$. La suite $f(b_n)$ étant minorée par d, on a $f(c) \geq d$, d'où finalement $f(c) = d$.

Remarque - Cet algorithme est en général infini (le $3^{\text{ème}}$ cas $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = d$ étant exceptionnel). A l'itération n, il fournit une approximation de la solution c avec une erreur inférieure à $(b_n - a_n) = (b-a)/2^n$, ce qui permet de décider du nombre d'itérations nécesaires pour obtenir un résultat avec une précision donnée.

Exercice 4. *On considère les fonctions* $x \mapsto x$ *et* $x \mapsto \cos(3\pi x)$ *sur l'intervalle* $[0,1]$ *(voir la figure 3 ci-dessous).*

1. *Montrer que l'équation* $\cos(\pi x) = x$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $[0,1]$. *Est-elle unique ?*
2. *Donner une approximation d'une solution de cette équation avec une erreur inférieure à 0,05.*

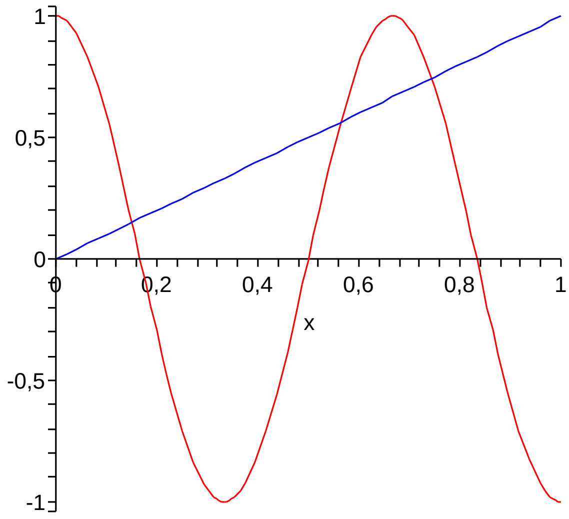

FIGURE 3 – Graphes de $x \mapsto x$ et $x \mapsto \cos(3\pi x)$ sur $[0,1]$

.

2 Dérivabilité, théorème des accroissements finis.

Rappel. L'équation d'une droite non verticale du plan muni des coordonnées (x, y) s'écrit de manière unique sous la forme $y = px + q$. Le coefficient p est son *coefficient directeur* (ou *pente*). Si M et N sont deux points de cette droite de coordonnées connues (x_M, y_M) et (x_N, y_N), on calcule la pente par :

$$p = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M}.$$

On obtient ensuite le coefficient q en considérant n'importe quel point connu M sur la droite : $b = y_M - ax_M$.

Définition. Soit f une fonction, a une valeur de son ensemble de définition, A le point de coordonnées $(a, f(a))$ et M un point quelconque de son graphe, de coordonnées $(x, f(x))$. La fonction f est *dérivable* en a si la sécante (AM) admet une position limite (non verticale) lorsque M tend vers A. Cette position limite est appelée *tangente* en A.

La fonction f est donc dérivable si le coefficient directeur $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ de (AM) admet une limite (finie) quand x tend vers a. Cette valeur limite (le coefficient directeur de la tangente) est notée $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout point a de I. La fonction $f' : a \mapsto f'(a)$ (fonction "coefficients directeurs des tangentes") est appelée *fonction dérivée* de f.

Exercice 5. *On considère la fonction* $f : x \mapsto x^2 + 1$.

1. *Démontrez par un calcul de limite qu'elle est dérivable au point A d'abscisse $a = 1$, et calculer l'équation de la tangente en A.*
2. *En déduire la dérivabilité et la tangente en $a = -1$ (sans autre calcul).*
3. *Etudier la dérivabilité en 0. Faire une représentation graphique du graphe de f sur $[-2, +2]$ en plaçant d'abord ces 3 tangentes.*

Remarque. Si f est dérivable en a alors f est continue en a. Il suffit d'appliquer le théorème sur le produit des limites à $f(x) - f(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x - a)$.

La figure 2 du chapitre 1 (page 4) donne un exemple de fonction avec un point (en $x = -2$) de continuité mais de non dérivabilité : le taux d'accroissement admet une limite à droite (et donc une "demi-tangente" à droite), une limite à gauche (et donc une "demi-tangente" à gauche), mais les coefficients directeurs de ces demi-tangentes sont distincts. On parle alors seulement de dérivabilité à droite ou à gauche.

A nouveau, il y a des exemples de non dérivabilité plus sauvages (sans l'existence de demi-tangentes) :

Exercice 6 *(Voir figure 4 ci-dessous).*

1. *En considérant la suite définie par* $u_n = (2n+1)\pi/2$*, montrer que la fonction* $\sin(x)$ *n'a pas de limite quand* x *tend vers* $+\infty$.
2. *Démontrez que la fonction* $f\ :\ \ x \mapsto x\sin(1/x)$ *est continue mais non dérivable à l'origine.*

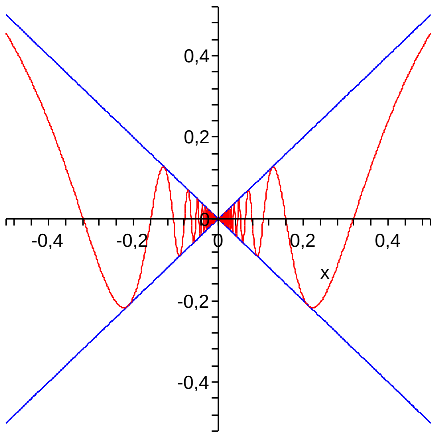

FIGURE 4 – Graphe de $x \mapsto x\sin(1/x)$ sur $[-1/2, 1/2]$

.

Calcul pratique d'une fonction dérivée. On rappelle les résultats suivants :

- la somme et le produit de deux fonctions dérivables est dérivable. Le quotient de deux fonctions dérivables f et g est dérivable en tout point a où $g(a) \neq 0$ et on a :

$$(f+g)' = f' + g'; \quad (fg)' = f'g + fg'; \quad (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

- la composée $g \circ f$ d'une fonction f dérivable en x avec une fonction g dérivable en $y = f(x)$ est dérivable en x et

$$(g \circ f)'(x) = g'(y) \times f'(x), \quad \text{d'où : } (g \circ f)' = g' \circ f \times f'.$$

- L'application réciproque f^{-1} d'une fonction f dérivable en x telle que $f'(x) \neq 0$ est dérivable en $y = f(x)$, et on a :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad \text{d'où : } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Ces règles permettent de calculer la dérivée de nombreuses fonctions connaissant celles des fonctions usuelles :

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout α réel.
- $\sin'(x) = \cos(x)$; $\cos'(x) = -\sin(x)$; $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$; $\exp'(x) = \exp(x)$.

Exercice 7.

1. *Démontrer la formule* $\tan'(x) = 1+\tan^2(x)$. *Calculer la dérivée de la fonction* $\tan(2\sqrt{x})$.
2. *Démontrer que la fonction tangente est bijective de* $]-\pi/2, +\pi/2[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Soit* arctan *sa fonction réciproque. Montrer que cette fonction est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et calculer sa dérivée.*

Théorème de l'extrémum local. *Si f est dérivable sur un intervalle I et admet un maximum (ou un minimum) en un point c à l'intérieur de I, alors $f'(c) = 0$.*

Preuve - Si c est un maximum local à l'intérieur de I, alors le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ est positif à gauche, et négatif à droite. En passant à la limite à gauche et à droite on doit avoir $f'(c) \geq 0$ et $f'(c) \leq 0$ donc $f'(c) = 0$.
Cette preuve ne fonctionne pas (et le théorème est faux !) si c est sur une extrémité de I.

Théorème de Rolle. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, vérifiant $f(a) = f(b)$. Il existe un point c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

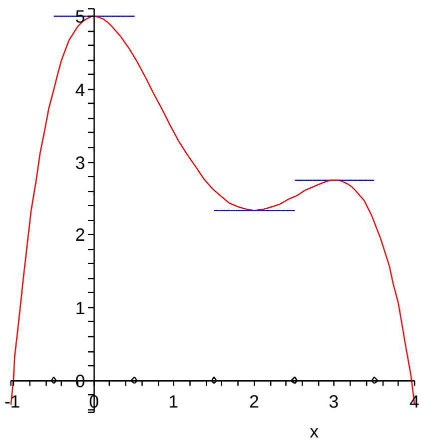

FIGURE 5 – Le théorème de Rolle : existence de tangences horizontales.

.

Remarques.

- Il y a existence des tangentes horizontales mais pas unicité (voir la figure 5 ci-dessus).

- Le théorème est faux si on ne suppose pas la fonction dérivable : considérer la fonction $x \mapsto |x|$ sur $[-1, 1]$.

- Si la fonction dérivée f' est continue, on peut à nouveau chercher numériquement c par la méthode de dichotomie appliquée à f'.

Preuve du théorème de Rolle - On sait que f est bornée ($f([a, b]) = [m, M]$) et atteint ses bornes (il existe c et d tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$). Si c et d sont sur le bord de $[a, b]$, puisque $f(a) = f(b)$, $m = M$ et f est constante. On peut alors prendre n'importe quel c dans l'intervalle. Sinon on a un minimum ou un maximum à l'intérieur de l'intervalle et on applique le théorème de l'extrémum local.

Théorème des accroissements finis. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe au moins un point c dans $]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.*

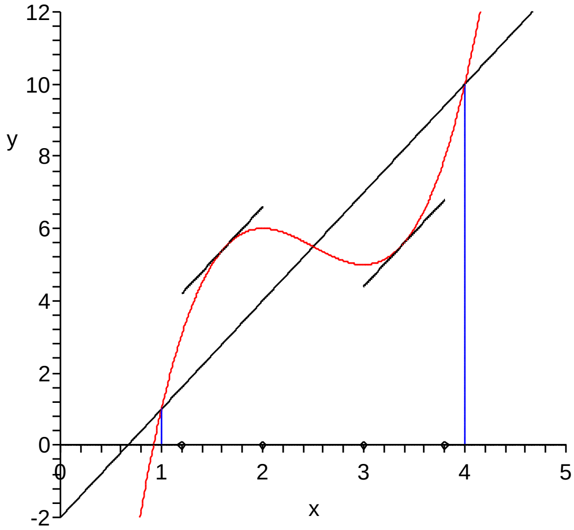

FIGURE 6 – Le théorème des accroissements finis : existence de tangentes parallèles à (AB).

Preuve - Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction :

$$g(x) = f(x) - f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

En effet, on a bien $g(a) = g(b)$ ($= 0$ ici) et $g'(c) = 0$ équivaut à $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Exercice 8. *La figure 6 ci-dessus a été réalisée avec la fonction f définie par :*

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 22$$

et en considérant les points A et B de son graphe d'abscisses $a = 1$ et $b = 4$. Déterminer les deux valeurs de c telles que les tangentes en c soit parallèles à la corde (AB).

Applications du théorème des accroissements finis. Ce théorème a un intérêt à la fois théorique et pratique :

1- *Application aux variations des fonctions dérivables.* Il est clair que si une fonction dérivable f est croissante sur un intervalle I alors sa dérivée est positive sur I. En effet, pour tout x et tout a dans I le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif et donc en passant à la limite $f'(a)$ est positif.

Le théorème des accroissements finis nous prouve la réciproque : si en tout point c de I la dérivée est positive, alors, d'après ce théorème, tous les taux d'accroissement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sont positifs pour a et b dans I et donc f est croissante sur I. Plus généralement, on a :

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow f'$ est positive sur I ;
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow f'$ est négative sur I ;
- f est constante sur $I \Leftrightarrow f'$ est identiquement nulle sur I.
- Si f' est positive (resp. négative) sur I et ne s'annule au pire qu'en des points "isolés" (la dérivée ne s'annule pas sur un intervalle ouvert autour de ce point) alors f est *strictement* croissante (resp. *strictement* décroissante).

2- *Calcul de limites de quotients : règle de l'Hopital.* Soient f et g continues et dérivables sur un intervalle I ouvert. On suppose que pour a dans I, $f(a) = g(a) = 0$. On a :

$$\text{Si } \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe et vaut } l, \text{ alors } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe et vaut encore } l.$$

Preuve - Soit h la fonction définie par $h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$. Puisque $h(a) = h(b)$, en appliquant le théorème de Rolle à h on obtient une variante du théorème des accroissements finis qui nous dit que sous les mêmes hypothèses on peut trouver c dans $]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Si b tend vers a alors puisque $a < c < b$, c tend aussi vers a et on a donc

$$\lim_{b\to a} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{b\to a} \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l.$$

Exercice 9. *En appliquant autant de fois que nécessaire la règle de l'Hopital déterminer l'existence et la valeur de la limite :* $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$.

3- *Majoration d'erreur.* Soit f continue et dérivable sur un intervalle I, dont la fonction dérivée f' est bornée par M sur I. Soit a une valeur dans I pour laquelle on connait $f(a)$. Si pour une autre valeur b dans I on approxime $f(b)$ inconnu par $f(a)$, on peut majorer l'erreur commise par :

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

Exercice 10. *On prend pour valeur approchée de Arctg(1,1) la valeur Arctg(1)=*$\pi/4$. *Donner une majoration de l'erreur commise.*

3 Dérivabilité d'ordre supérieur, formules de Taylor.

Dérivées d'ordre supérieur. On dira que f est 2 fois dérivable en a si f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a, et sa fonction dérivée f' (définie sur I) est dérivable en a. Le nombre dérivé de f' en a est noté $f''(a)$. En itérant, on définit de même une fonction n fois dérivable en a. La dérivée $n^{\text{ième}}$ en a de f est notée $f^{(n)}(a)$.

Une fonction f est dite de classe C^n sur I lorsqu'elle est n fois dérivable en tout a de I et sa fonction dérivée $n^{\text{ième}}$ $f^{(n)}$ est continue sur I. Elle est de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout n (f est indéfiniment dérivable). Exemples : la fonction exponentielle, les fonctions polynômes, trigonométriques...

Exercice 11. *Calculer : $(fg)''$, $(fg)'''$ en fonction des dérivées de f et de g.*
Quelle serait la formule générale donnant $(fg)^{(n)}$?

Définition. f admet un *développement limité* à l'ordre n en a s'il existe un polynôme $P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$ tel que $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n$.
Si un tel polynôme P_n existe, il est unique. Son existence est donnée par la :

Formule de Taylor-Young. Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant a, n fois dérivable en a. Alors pour tout x dans I on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

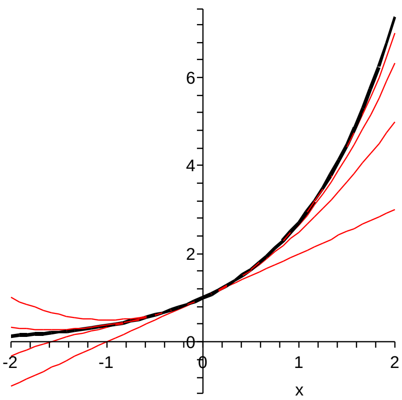

FIGURE 7 – Les 4 premières approximations de Taylor de $\exp(x)$ en $x = 0$.

Remarque. La preuve pour $n = 1$ est très facile : si f est une fois dérivable en a posons : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \varepsilon(x)$. Cette égalité s'écrit encore :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

dans laquelle, par définition de la dérivabilité, $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a. Remarquons que le développement limité à l'ordre 1 de f en a $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ a pour graphe la tangente en a.

Preuve générale. Elle se fait par récurrence sur l'ordre n, initialisée par la remarque précédente. Si f est n fois dérivable en a, f' est $n-1$ fois dérivable en a. On lui applique l'hypothèse de récurrence :

$$f'(x) = P_{n-1}(f')(x) + o((x-a)^{n-1})$$

où $P_{n-1}(f')$ désigne le polynôme de Taylor de la fonction f' à l'ordre $n-1$. On utilise ensuite les deux propriétés suivantes :

- $P_n(f)' = P_{n-1}(f')$. (cela provient de la forme particulière des coefficients).
- la primitive $\varphi(x)$ d'un $o((x-a)^{n-1})$ s'annulant en $x=a$ est un $o((x-a)^n)$. (c'est une conséquence du théorème des accroissements finis).

On a donc ici $f'(x) = P_n(f)'(x) + \varphi'(x)$. Deux fonctions ayant même dérivée sur un intervalle et prenant la même valeur en un point a sont égales. Donc : $f(x) = P_n(f)(x) + \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est un $o((x-a)^n)$.

Exercice 12.

1. *Calculer le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction exponentielle.*
2. *Calculer le développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction $f: x \mapsto 1/1-x$.*
3. *En déduire les développements limités en 0 de $x \mapsto \exp(2x)$ et de $g: x \mapsto 1/1+x$.*

Calcul pratique de développements limités. Dans la pratique on calcule rarement directement les coefficients $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. On obtient un développement limité d'une fonction à partir de ceux des fonctions usuelles (connus) en appliquant les règles algébriques suivantes :

Si f et g admettent des développements limités P_n et Q_n à l'ordre n au voisinage de a, alors :

• $f+g$ admet un développement limité à l'ordre n qui est : $P_n + Q_n$.

• fg admet un développement limité à l'ordre n qui est : $P_n \times Q_n$ tronqué à l'ordre n.

• f/g admet un développement limité à l'ordre n qui est obtenu en effectuant la division suivant les puissances croissantes du polynôme P_n par le polynôme Q_n.

• Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a P_n , et g vérifie $g(0)=0$ et admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 Q_n , alors $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n qui est $P_n \circ Q_n$ tronqué à l'ordre n.

• Si f admet un développement limité P_n à l'ordre n au voisinage de a, alors f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ obtenu en dérivant terme à terme P_n.

• Si f admet un développement limité P_n à l'ordre n au voisinage de a, alors toute primitive F de f ($F' = f$) admet un développement limité à l'ordre $n+1$ dont le premier terme est $F(a)$, obtenu en prenant une primitive de chaque terme de P_n.

Développements limités classiques (au voisinage de 0) :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)
\end{aligned}$$

Exercice 13.

1. *Calculer le développement limité à l'ordre* 3 *de la fonction* $tg(x)$.
2. *Calculer le développement limité à l'ordre* n *de* $\ln(1+x)$.
3. *Calculer le développement limité à l'ordre* 2 *de* $\sqrt{(1+x)}$. *En déduire la limite :* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(1+x)}-1-x/2}{x^2}$.

La formule de Taylor-Lagrange. Soit f définie sur un intervalle ouvert I contenant a, $n+1$ fois dérivable sur I. Alors pour tout x dans I, il existe c dans $]a,x[$ (ou $]x,a[$) tel que :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Remarques.

- Pour $n=0$ on retrouve la formule des accroissements finis appliquée à l'intervalle $[a,x]$.

- Cette formule permet de majorer l'erreur commise lorsqu'on approxime $f(x)$ par son polynôme de Taylor $P_n(x)$. Soit $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$ le reste de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n. Supposons que $f^{(n+1)}$ soit bornée sur $[a,x]$ (ou $[x,a]$) par M. On a alors :

$$|R_n(x)|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Preuve de la formule de Taylor-Lagrange - Comme pour la formule des accroissements finis, elle se déduit du théorème de Rolle appliqué à une fonction bien choisie. On fixe a et x, on prend une variable t entre a et x et on pose :

$$\varphi(t)=f(x)-f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^k(t)}{k!}(x-t)^k-\lambda(x-t)^{n+1}$$

On a $\varphi(x)=0$ et on choisit la constante λ de sorte que on ait aussi $\varphi(a)=0$ (c'est évidemment possible). Puisque φ est dérivable sur I (donc continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$), le théorème de Rolle nous dit qu'il existe c strictement compris entre a et x tel que $\varphi'(c) = 0$. Le calcul de $\varphi'(t)$ donne (*exercice : vérifiez cette formule pour $n = 3$, puis pour n quelconque*) :

$$\varphi'(t) = (x - t)\left((n+1)\lambda - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\right)$$

et donc $\varphi'(c) = 0$ si et seulement si $\lambda = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$. En écrivant $\varphi(a) = 0$, on obtient la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice 14. *On approxime* $\exp(-0,1)$ *à l'aide du développement de Taylor-Lagrange de la fonction exponentielle au voisinage de $x = 0$.*

1. *Ecrire la formule de Taylor-Lagrange de* exp *à l'ordre n.*
2. *Donner une majoration de son reste à l'ordre n sur l'intervalle* $[-0.1\ ,\ 0]$.
3. *A quel ordre doit-on prendre la formule de Taylor-Lagrange si on souhaite une approximation de* $\exp(-0,1)$ *à* 10^{-5} *près ? Calculer cette valeur approchée.*

Test d'auto-évaluation sur le chapitre 2

1. Donner un exemple de fonction discontinue en un point (autre que ceux du cours).
2. La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est-elle continue à l'origine ? Est-elle dérivable à l'origine ?
3. Enoncez le théorème des valeurs intermédiaires et donnez un exemple où il s'applique.
4. Enoncez la règle de l'Hopital et calculer la limite :

   $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}.$$

   Retrouvez ce résultat en calculant le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1 + x)$.
5. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange de $f(x) = x^3$ autour de $a = 1$. En déduire que pour tout $x > 0$, le graphe de f est au dessus de sa tangente en 1.
6. Quels sont les développements limités à l'ordre n au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+x}$, e^{2x}, $\sin(x^2)$?

Chapitre 2 : Travaux dirigés

1. *Variations et fonction réciproque.* On considère la fonction $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - x$.
   (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0, 1]$. Quelle est son image ?
   (b) Donner l'expression de sa fonction inverse.
   (c) Calculer la pente de la tangente à f en $1/4$ et en déduire celle de f^{-1} en $3/4$.

2. *Fonctions trigonométriques inverses.* Pour les deux premières questions on s'inspirera de l'exercice 7 vu dans ce chapitre.
   (a) Démontrer que si on restreint la fonction cos à $[0, \pi]$ elle devient bijective de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Montrer de même que sin est bijective de $[-\pi/2, +\pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Les fonctions réciproques sont notées arccos et arcsin.
   (b) Démontrer que arccos et arcsin sont dérivables sur $]-1, 1[$ et calculer leur dérivées. En déduire que la fonction $\arccos + \arcsin$ est constante sur $[-1, 1]$ et calculer cette constante.

3. *Fonctions hyperboliques.* On considère les 3 fonctions "cosinus hyperbolique", "sinus hyperbolique" et "tangente hyperbolique" définies par
$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$
   (a) Etudier leur domaine de définition, leur parité.
   (b) Vérifiez les relations : $e^x = ch(x) + sh(x)$, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.
   (*Cette dernière relation justifie l'appellation "hyperbolique" : l'application $x \mapsto (ch(x), sh(x))$ a pour image l'hyperbole $X^2 - Y^2 = 1$ de la même manière que $x \mapsto (\cos(x), \sin(x))$ a pour image le cercle $X^2 + Y^2 = 1$.*)
   (c) Calculer les dérivées des fonctions hyperboliques.
   (d) Vérifier : $sh(x) = \frac{e^x}{2}(1 - e^{-2x})$ et en déduire le signe de $sh(x)$, puis les variations de $ch(x)$ (avec les limites), puis le signe de $ch(x)$, et enfin les variations de $sh(x)$ (avec les limites).
   (e) Etudier les variations et limites de $th(x)$.
   (f) Vérifier : $sh(x) < \frac{e^x}{2} < ch(x)$ et placer sur un même dessin les graphes des 4 fonctions ch, sh, th, et $\frac{e^x}{2}$.

4. *Fonctions hyperboliques inverses.*
   (a) Démontrer que ch est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et th est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1, +1[$. Leurs applications réciproques sont notées : $argch$, $argsh$ et $argth$.
   (b) Calculer leurs dérivées.
   (c) En déduire les relations : $argsh(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

5. *Résolution par dichotomie.* On considère l'équation : $x - \sin x - 1/4 = 0$.
   (a) Démontrer que cette équation admet au moins une solution dans $[0, \pi/2]$.
   (b) On veut approximer une solution par dichotomie à partir des bornes de cet intervalle. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision majorée par 10^{-2}.
   (c) Calculer cette valeur approchée.

6. *Une approximation par le théorème des accroissements finis.* A l'aide du théorème des accroissements finis donner un encadrement à 10^{-4} près de $\sqrt[3]{1005}$.

7. *Une suite divergente.* On pose $u_n = 1 + \frac{1}{2} + + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
   (a) Démontrez à l'aide du théorème des accroissements finis que pour tout p on a : $\frac{1}{p+1} < \ln(p+1) - \ln(p) < \frac{1}{p}$.
   (b) En déduire : $u_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < u_n$, puis démontrer la divergence de u_n.

8. *Développements limités et calcul de limites.*
   (a) Calculer le développement limité de $ch(x)$ et $sh(x)$ en 0 à l'ordre n.
   (b) Calculer le développement limité à l'ordre 4 de $(sh(x)/x)^\alpha$ en 0, pour tout α réel. En déduire la limite quand x tend vers 0 de la fonction
   $$\frac{1}{x^4}\left(\left(\frac{shx}{x}\right)^\alpha - 1 - \frac{\alpha}{6}x^2\right).$$

9. *Une étude locale de fonction.* On considère la fonction f définie sur $]-\pi, +\pi[\setminus\{-\pi/2, 0, +\pi/2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)}$.
   (a) Vérifier que : $f(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)}$ et donner des valeurs à f en $-\pi/2$ et $\pi/2$ qui permettent de prolonger f de manière continue et dérivable en ces 2 points.
   (b) On pose $f(0) = 0$. A l'aide de l'expression précédente, calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 4. En déduire que f est continue en 0, dérivable en 0, et donner la valeur de $f'(0)$.
   (c) Calculer la fonction f', et démontrez que f est de classe C^1 sur $]-\pi, +\pi[$.

10. *Une approximation locale.* On approxime $\ln(1,1)$ à l'aide du développement de Taylor-Lagrange de la fonction C^∞ f définie par $f(x) = \ln(1+x)$ au voisinage de $x = 0$.
    (a) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange de f à l'ordre n.
    (b) Donner la formule générale de $f^{(n)}(x)$.
    (c) En déduire une majoration du reste à l'ordre n de la formule de Taylor-Lagrange de f en 0 sur l'intervalle $[0\ ,\ 0.1]$.
    (d) A quel ordre doit-on prendre la formule de Taylor-Lagrange si on souhaite une précision de $\ln(1,1)$ à 10^{-3} près ? Calculer cette valeur approchée.
    (e) Combien de termes serait-il nécessaire d'utiliser si on voulait calculer $\ln(2)$ avec le même développement de Taylor ?