S2 : Analyse

Ce texte est le document de travail complet pour ce module. Il se compose de :
- 4 chapitres de cours avec exercices qui seront étudiés pendant les séances de Cours-T.D. ;
- un test d'autoévaluation en fin de chaque chapitre (travail personnel) ;
- une feuille de travaux dirigés (exercices d'applications, problèmes) par chapitre ;
- des travaux pratiques qui seront éxécutés sous Maple en fin de semestre.

Il est donc impératif d'avoir avec soi ce document pendant toute séance de cours, travaux dirigés ou travaux pratiques. Il est disponible sous Moodle.

Contenu du cours :

Le contenu de ce document est divisé en quatre chapitres :

Ch 1 : Suites et fonctions numériques : variations et limites.
Ch 2 : Etude et approximation locale d'une fonction numérique.
Ch 3 : Résolution numérique d'équations.
Ch 4 : Calcul intégral.

Contrôle des connaissances :

- un contrôle de 1 heure en milieu de semestre ;
- un contrôle de 2 heures en fin de semestre.

Pendant ces contrôles, le document de travail est interdit, et l'emploi d'une calculatrice est autorisé et fortement conseillé (le modèle utilisé au lycée sera suffisant).
On vérifiera les connaissances sur ce document par une question du type de celles figurant dans les tests d'auto-évaluation.
On vérifiera les connaissances acquises sous Maple par une question spécifique (sans machine) au second contrôle.

Ch. 1 : Suites et fonctions numériques : variations et limites.

1 La droite réelle.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est en correspondance bijective avec les points d'une droite :

$$-\infty \;\text{————————————}\; \overset{0}{\cdot} \;\text{————————————}\; +\infty$$

Structure algébrique. $\mathbb{R}$ possède une sructure d'*anneau*, c'est-à-dire qu'il possède deux opérations $+$ et $\times$ avec leurs éléments neutres 0 et 1, et les règles de calcul usuelles (commutativité, associaticité, distributivité...).
De plus tout élément non nul x de $\mathbb{R}$ admet un unique inverse z c'est-à-dire un élément z tel que $x \times z = 1$ (noté $1/x$). Lorqu'un anneau possède cette dernière propriété, on dit que c'est un *corps*.

Le corps $\mathbb{R}$ contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (qui admettent une écriture sous forme de fraction p/q), qui lui-même contient l'ensemble $\mathbb{Z}$ des *entiers*, qui lui-même contient l'ensemble $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* (positifs ou nul). $\mathbb{Q}$ est un corps (pourquoi ?) ; $\mathbb{Z}$ est un anneau, mais n'est pas un corps (pourquoi ?). $\mathbb{N}$ n'est pas un anneau (pourquoi ?).

$\mathbb{R}$ est contenu dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la forme $x+iy$ en correspondance bijective avec les points (x, y) du plan. Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ se déduisent de la règle $i^2 = -1$.

$\mathbb{R}$ (et donc $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$) possède une *distance* : $d(x, y) = |y - x|$.

$\mathbb{R}$ (et donc $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$) possède une *relation d'ordre total* : $\leq$ (et ses variantes : $\geq$,$<$,$>$).

$\mathbb{R}$ est *archimédien* : pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $y > 0$ il existe un n entier tel que : $ny > x$.

Intervalle ouvert : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ (il y a des variantes fermées, semi-fermées).
Intervalle ouvert centré en c : $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$.

Majorants, borne supérieure : Un majorant d'une partie A de $\mathbb{R}$ est un nombre M tel que pour tout a de A : $a \leq M$. La borne supérieure de A ($\sup(A)$) est le plus petit de ses majorants. On a des notions analogues de minorants et de borne inférieure.
Dans $\mathbb{R}$ toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. De même, toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

Exercice 1.

1. *Ecrire sous forme d'intervalle :* $A = \{x \in \mathbb{R},\ |x - 2| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R},\ |2x + 1| \leq 5\}$. *Les dessiner sur la droite réelle. Quel est leur milieu ? leur longueur ?*
2. *Donner un majorant de A, de B, puis l'ensemble de tous les majorants de A, de tous les majorants de B, puis* $\sup(A)$ *et* $\sup(B)$*.*
3. *L'ensemble* $\{1 + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ *est-il minoré ? majoré ? borné ?*

2 Suites et fonctions numériques : variations.

Suite numérique : c'est une application u d'une partie $D = \{n \geq n_0\}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcll} u: D & \to & \mathbb{R} & \\ n & \mapsto & u(n) & \text{(plus souvent noté } u_n) \end{array}$$

Exemple :

$$D = \{n \geq 1\}, \quad u: \ n \mapsto u_n = 5\frac{n+2}{n}.$$

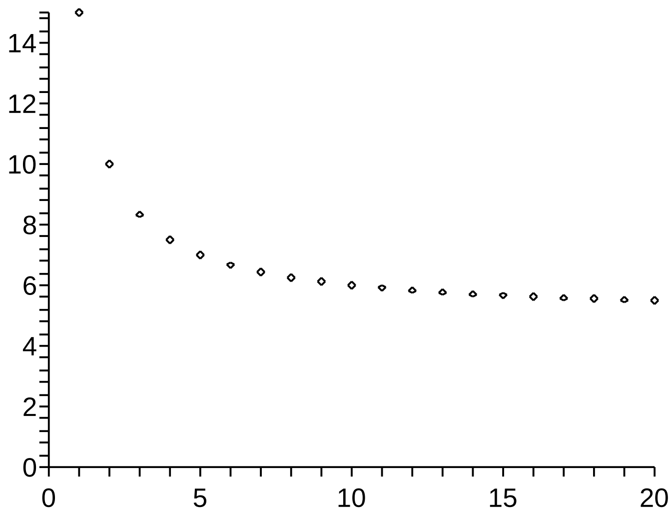

FIGURE 1 – Représentation graphique de $u_n, \ n \in \{1, \cdots 20\}$

.

Fonction numérique : c'est une application f d'une partie D (en général une réunion d'intervalles ouverts) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f: D & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple :

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f(x) = 5|\frac{x+2}{x}|.$$

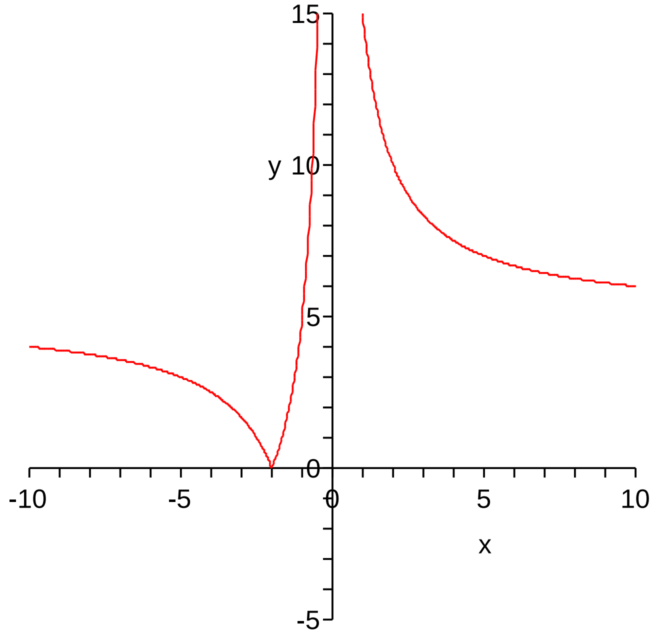

FIGURE 2 – Représentation graphique de f sur l'intervalle $]-10, 10[$.

Variations d'une suite ou d'une fonction.

Une suite numérique est croissante si pour tout n, $u_n \leq u_{n+1}$, décroissante si pour tout n, $u_n \geq u_{n+1}$ et constante si pour tout n, $u_n = u_{n+1}$.

Une fonction numérique est croissante sur un intervalle I si pour tout couple (x, y) dans I tel que $x < y$, on a : $f(x) \leq f(y)$. Elle est décroissante sur I si pour tout couple (x, y) dans I tel que $x < y$, on a : $f(x) \geq f(y)$. Elle est constante sur I si pour tout couple (x, y) dans I, on a : $f(x) = f(y)$.

On dira qu'une croissance ou décroissance est stricte lorsqu'on peut remplacer l'inégalité large par une inégalité stricte dans les définitions précédentes. Une suite (ou fonction) qui est soit croissante soit décroissante est dite "monotone".

Exercice 2.

1. *Décrire et démontrer le type de variation de la suite u de l'exemple précédent.*
2. *Décrire et démontrer le type de variation de la fonction f de l'exemple précédent.*
3. *Quel est le type de variation de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$?*
4. *On définit une suite v par $v_1 = \sqrt{2}$, puis $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$ pour tout $n \geq 1$. Démontrer que v est croissante, et est majorée par 2.*

Fréquemment, les suites sont définies de manière itérative par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples classiques :

Suite arithmétique. C'est une suite définie par la donnée de son premier terme et la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + a$, où a est une constante.

Suite géométrique. C'est une suite définie par la donnée de son premier terme et la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n \times q$, où q est une constante.

Exercice 3. *Etudier le type de variation des suites arithmétiques et géométriques.*

Existence d'une fonction réciproque. Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est injective (c'est-à-dire : pour tout y l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans I). Elle est donc bijective de I sur $J = f(I)$ (c'est-à-dire : pour tout y dans $f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet exactement une solution dans I).

Elle admet alors une application réciproque : $f^{-1} : \ J \to I$ qui à tout y de J associe l'unique solution x de $f(x) = y$. Son graphe est obtenu à partir de celui de f par la symétrie : $(x, y) \to (y, x)$, c'est-à-dire par symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Exercice 4. *La fonction* $f : \ x \mapsto x^2$ *est-elle injective sur* $[0, 1]$ *? sur* $[-1, 1]$ *? sur* $[-1, 0]$ *? Si oui, donnez l'image* $J = f(I)$ *et précisez son application inverse.*

3 Limites d'une suite ou d'une fonction.

On dit qu'une suite (u_n) tend vers l lorsque n tend vers l'infini lorsque tout intervalle ouvert $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ autour de l contient tous les termes de la suite au delà d'un certain rang n_0 :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un } n_0 \text{ tel que si } n \geq n_0, \text{ alors } |u_n - l| < \varepsilon.$$

De même, on dit qu'une fonction f tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert autour de l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x au-delà d'un certain rang x_0 :

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un } x_0 \text{ tel que si } x \geq x_0, \text{ alors } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

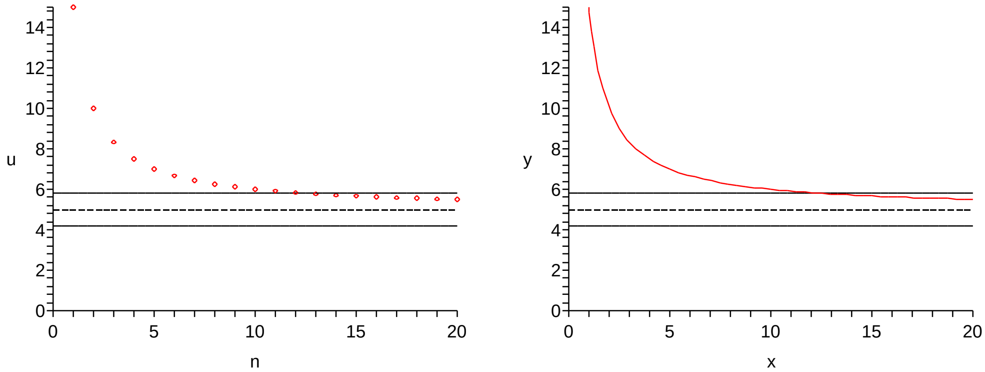

FIGURE 3 – Toutes les valeurs de u (ou de f) rentrent dans l'intervalle $]5-0.8\ ,\ 5+0.8[$ pour n (ou x)≥ 13.

Exercice 4. *Nous allons démontrer ce que suggèrent les graphiques précédents, à savoir :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 5, \ \ \textit{et} \ \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 5.$$

On se donne donc un intervalle quelconque $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$. Trouver en fonction de ε un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite rentrent dans cet intervalle. De même, trouver un rang x_0 au delà duquel toutes les valeurs $f(x)$ rentrent dans cet intervalle.

Généralisation de la notion de limite. Dans le cas d'une fonction, on peut généraliser la notion de limite lorsque la variable x se rapproche d'une valeur a autre que $+\infty$. Il suffit que a appartienne à D ou soit sur le bord de D (cas le plus intéressant) :

On dit qu'une fonction f tend vers l lorsque x tend vers a lorsque tout intervalle ouvert autour de l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour $|x-a|$ inférieur à un certain rang η.

En d'autres termes on a : $\lim_{x\to a} f(x) = l$ lorsque, quelquesoit l'intervalle ouvert $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ autour de l, on peut trouver un $\eta > 0$ tel que :

$$\text{si } |x-a| < \eta \text{ alors } |f(x)-l| < \varepsilon.$$

De plus, si on obtient cette condition seulement pour $0 < (x-a) < \eta$, on dit que f tend vers l lorsque x tend vers a par valeurs positives (ou par la droite). On a de même une notion de limite à gauche lorsque $x-a<0$. On utilise les notations :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

La limite en a de f existe si et seulement si les limites à droite et à gauche en a existent et sont égales.

4 Suites convergentes, suites divergentes.

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $l = +\infty$ lorsque n tend vers l'infini ($\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$), lorsque tout intervalle ouvert $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite au delà d'un certain rang n_0. On a une définition analogue pour $l = -\infty$, et pour les fonctions.

On dit qu'une suite est *convergente* lorsqu'elle admet une limite *finie* quand n tend vers $+\infty$. Elle est *divergente* dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque, ou bien la limite n'existe pas (par exemple $u_n = (-1)^n$), ou bien elle existe mais est infinie (par exemple $u_n = 2n$).

Remarque : toute suite convergente est bornée, puisque tous ses termes sauf un nombre fini prennent leurs valeurs dans un intervalle borné autour de l. La réciproque est fausse :
Exemple de suite bornée mais divergente : $u_n = (-1)^n$.

Exercice 5.

1. *Montrer que toute suite arithmétique avec* $a \neq 0$ *est divergente.*
2. *Montrer que toute suite géométrique avec* $|q| < 1$ *converge vers 0.*
3. *Montrer que toute suite géométrique avec* $|q| > 1$ *diverge.*

Un critère suffisant de convergence de suites.

Toute suite croissante et majorée par M *converge vers une limite* l. *De plus on a :* $l \leq M$.
Toute suite décroissante et minorée par m *est convergente vers une limite* l, *et* $l \geq m$.

Exemple - La suite (v_n) de l'exercice 2, question (4) est convergente, et sa limite est inférieure ou égale à 2.

Attention ! Même si $v_n < M$ pour tout n, on a seulement : $\lim_n(v_n) \leq M$. On retiendra donc que *par passage à la limite les inégalités strictes deviennent larges.*

Preuve du critère - On utilise que la partie $A = \{u_n, n \geq 0\}$ est non vide et majorée, et donc admet une borne supérieure l. On vérifie ensuite que l est bien la limite de la suite. En effet puisque l est un majorant de A et puisque quelquesoit $\varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A, on peut trouver un terme u_{n_0} de la suite qui vérifie : $l - \varepsilon < u_{n_0} \leq l$. La suite étant croissante, tous les termes de la suite rentrent dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l]$ à partir de ce rang n_0.

La propriété des intervalles emboités. (très utile pour approcher une limite)

Deux suites adjacentes a_n *et* b_n *(c'est-à-dire vérifiant :* a_n *croissante,* b_n *décroissante,* $a_n < b_n$ *et* $\lim(b_n - a_n) = 0$*) sont convergentes et ont même limite.*

En effet la première est croissante majorée (par quoi ?) et la seconde décroissante minorée. Remarquons que cette limite est l'intersection de tous les intervalles emboités $[a_n, b_n]$.

Exercice 6. *Montrez que les suites définies par* $u_n = \sqrt{2} - 1/n^2$ *et* $v_n = \sqrt{2} + 1/n$ *sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?*
Que vaut l'intersection $\cap_{n=1}^{\infty}[u_n, v_n]$ *dans* $\mathbb{R}$ *? dans* $\mathbb{Q}$ *?*

Critère de convergence par comparaison.
Si à partir d'un certain rang n_0 on a : $a_n \leq b_n \leq c_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} b_n = l$.
On a un critère analogue pour les fonctions : si on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle autour de a et si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

Exercice 7. *Déterminer la limite de* $x\sin(1/x)$ *quand* x *tend vers 0.*

5 Calcul pratique d'une limite.

Dans la pratique, on utilise rarement la définition elle-même. On utilise d'abord (lorsque c'est possible) les propriétés "algébriques" des limites (c'est-à-dire les propriétés par rapport aux opérations algébriques). On rappelle le théorème suivant :

Règles algébriques. Si les suites (u_n) et (v_n) ont pour limites l et l' quand n tend vers l'infini alors :

1. $(u_n + v_n)$ a pour limite $l + l'$;
2. $(u_n \times v_n)$ a pour limite $l \times l'$;
   En particulier $(a \cdot u_n)$ a pour limite al si a est une constante.
3. Si $l' \neq 0$, (u_n/v_n) a pour limite l/l' ;
   Si le dénominateur tend vers $l' = 0$ *en gardant un signe constant*, alors (u_n/v_n) a pour limite $\pm\infty$, le signe du résultat étant donné par la règle des signes d'un quotient.
   On peut symboliser ce résultat (pour $l > 0$) par : $l/0^+ \to +\infty$, $l/0^- \to -\infty$.

Règles algébriques étendues. La plupart de ces résultats s'étendent aux cas où les limites l ou l' sont infinies avec les règles représentées par la liste suivante (le signe "$\to$" symbolise ici à chaque fois un théorème qu'on peut énoncer sous la forme précédente) :

1. $(+\infty) + (+\infty) \to (+\infty)$, $(-\infty) + (-\infty) \to (-\infty)$, $(\pm\infty) + l \to (\pm\infty)$.
2. $(\pm\infty) \times (\pm\infty) \to (\pm\infty)$,   si $l \neq 0$, $(\pm\infty) \times l \to (\pm\infty)$,
   le signe du résultat est donné par la règle des signes d'un produit.
3. $l/(\pm\infty) \to 0$,   si $l \neq 0$, $(\pm\infty)/l \to (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0^+ \to (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0^- \to (\pm\infty)$,
   le signe du résultat étant donné par la règle des signes d'un quotient.

On a exactement les mêmes résultats si on considère deux fonctions f et g admettant des limites l et l' lorsque x tend vers la même valeur a.

Règles de composition. (Il y a à nouveau des versions étendues aux limites infinies qu'on ne précise pas ici.)

1. On considère la fonction $g \circ f$ (g composée avec f) définie par : $x \mapsto g(f(x))$. On a :

$$\text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x\to b} g(x) = c, \text{ alors } \lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = c.$$

2. On considère une suite (u_n) et une fonction f. On a :

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = b \text{ et } \lim_{x\to b} f(x) = c, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = c.$$

Remarque : On utilisera fréquemment cette propriété lorsque b est dans le domaine de définition de f et $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$ (on dit alors que f est continue en b : voir le chapitre suivant). Dans ce cas, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(b)$.

Exercice 8. *A l'aide des règles ci-dessus, étudier l'existence et la valeur des limites suivantes :*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)x}{\sqrt{|x|}}$; $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)x}{|x|}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \exp(1-n^2)$; $\lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{1}{n} + \ln(1+\frac{1}{n}))$.

Les résultats précédents permettent de calculer les limites de suites ou fonctions sauf dans les 4 situations suivantes, appelées "formes indéterminées", symbolisées par :

1. $(+\infty) + (-\infty) \to$?
2. $0 \times (\pm\infty) \to$?
3. $(\pm\infty)/(\pm\infty) \to$?
4. $0/0 \to$?

Dans ces situations, les résultats changent suivant les suites ou fonctions considérées. On doit "lever l'indétermination" par différentes techniques, qui visent toutes à comparer les vitesses de convergence vers 0 ou ∞ pour repérer le terme dominant. On pourra par exemple essayer de simplifier l'expression, ou encore utiliser les critères de comparaison. Nous aurons d'autres outils dans le chapitre suivant (dérivation, développements limités).

Exercice 9.

1. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$; $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$;
2. *Vérifier la formule :* $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$. *En déduire l'existence et la valeur de la limite :* $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$.
3. *Démontrer que pour* $x > 0$, $\sin x < x$. *En déduire :* $1 - x^2/2 < \cos x < 1$ *et* $x - x^3/3 < \sin x < x$. *Calculer la limite quand* x *tend vers 0 de* $\sin x/x$.

6 Comparaison de deux fonctions au voisinage d'un point

Soit a un point (éventuellement infini) sur le bord des domaines de définition de f et de g. On introduit le vocabulaire et les notations suivantes :

- f est équivalente à g au voisinage de a (notation : $f \sim g$), si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Deux fonctions équivalentes en a ont donc même limite quand x tend vers a.

Exercice 10.

1. *Montrer que* $\sin x \sim x$ *au voisinage de 0.*
2. *Montrer que si* $f \sim f_0$ *et* $g \sim g_0$ *alors* $(fg) \sim (f_0 g_0)$ *et* $(f/g) \sim (f_0/g_0)$.
3. *Attention, c'est faux pour une somme ou différence : montrer que* $\cos(x) \sim 1$ *et aussi* $\cos(x) \sim 1 - x^2/2$. *Pourtant,* $O \not\sim x^2/2$.
4. *Montrer qu'un polynôme* $P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_0$ *est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de* $+\infty$ *ou de* $-\infty$.
5. *Soit* $P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_0$ *et* $Q(x) = b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_0$ *deux polynômes de degré* p *et* q. *Trouver un équivalent de* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *au voisinage de* $+\infty$ *et en déduire sa limite quand* x *tend vers* $+\infty$.

• f est dominée par g au voisinage de a, $f(x) = b(x)g(x)$ où b est bornée sur un intervalle autour de a.
Notation : $f = O(g)$.
Exemple : $x^2 \sin(1/x) = O(x^2)$ au voisinage de 0.

• f est négligeable devant g au voisinage de a, si $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
Notation : $f = o(g)$.
Exemple : Si $p < q$, $(x-a)^p = o((x-a)^q)$ au voisinage de a.

On a donc : $f(x) = g(x) + o((x-a)^n)$ si et seulement si :

$$f(x) = g(x) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

ce qui signifie : $f - g$ tend vers 0 quand x tend vers a "plus rapidement" que $(x-a)^n$.

Test d'auto-évaluation sur le chapitre 1

1. Que signifie : (u_n) est monotone ?, f est strictement croissante sur $[0,1]$?
2. Que signifie $lim_{x\to+\infty} u_n = l$?
   A l'aide de cette définition, démontrez que la suite $u_n = 1/\ln(n)$ converge vers 0.
3. Démontrer que la suite définie par $v_1 = 1$, puis $v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$ pour tout $n \geq 1$ est convergente, et que sa limite l vérifie $l \leq 2$.
4. Rappeler la règle de composition des limites d'une suite et d'une fonction. Déterminer la limite de la suite (v_n) précédente en utilisant cette règle.
5. Déterminer : $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}$.
6. Donner un équivalent de $\tan x$. En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

Chapitre 1 : Travaux dirigés

1. Soit $v_n = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$ la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q.
   (a) En utilisant la formule de l'exercice 9.2 du cours, vérifier que : $v_n = \frac{1-q^n}{1-q}$.
   (b) En déduire que si $q < 1$, la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
   (c) Application : calculer $\sum_{i=0}^{\infty}(10^{-3})^i$. On donnera le résultat sous forme d'une fraction.

2. (a) Etudier (par récurrence) les variations de la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{3}\exp(u_n)$, lorsque $u_0 = 0$, puis lorsque $u_0 = 1$.
   (b) Etudier la convergence de ces suites. (Dans le premier cas, on pourra utiliser $e^x > 3x$ pour x assez grand.)

3. On considère la suite définie par $u_n = \frac{1}{n^3}(\sum_{i=1}^{n} i^2)$.
   (a) Démontrer la formule : $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante, et convergente. Quelle est sa limite ?

4. *Une définition du nombre e.*
   (a) Démontrer que les suites définies par $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!}$ et $b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{1}{n \cdot n!}$ sont adjacentes, et donc convergentes.
   (b) On note e leur limite commune. Calculer une approximation par défaut de e donnée par a_5 et préciser une majoration de l'erreur à l'aide de l'encadrement précédent.

5. *Approximation décimale d'un nombre réel.* Un nombre décimal est un nombre rationnel de la forme $p/10^n$. Exemple : $1,3333 = 13333/10^4$.
   (a) La partie entière $[x]$ d'un réel x est le plus grand entier p inférieur ou égal à x : $p \leq x < p+1$. Démontrer que pour tout réel x on a : $10[x] \leq [10x]$.
   (b) Soit $p_n = [x \times 10^n]$, $d_n = p_n \cdot 10^{-n}$ et $e_n = (p_n + 1) \cdot 10^{-n}$.
   Calculer les trois premiers termes de chacune de ces suites lorsque $x = \sqrt{2}$.
   Vérifier que $d_n \leq x < e_n$ et montrer que les deux suites (d_n) et (e_n) sont des suites de nombres décimaux adjacentes qui convergent vers x.

   La suite (d_n) est appelée suite décimale approchée par défaut de x et (e_n), suite décimale approchée par excès de x. En général, ces suites décimales sont illimitées, même lorsque x est rationnel, sauf bien sûr lorsque x est lui-même décimal. Exemple : 13/8=1,625.

6. *Approximation décimale d'un nombre rationnel.*
   (a) En effectuant la division, donner les 12 premiers termes de la suite décimale illimitée par défaut du rationnel $x = 13/7$. Pouvez-vous deviner le développement décimal illimité infini de ce rationnel ? Pour quelle raison cette périodicité apparaitra-t-elle systématiquement lorsque x est rationnel ?
   (b) Réciproquement, on considère un réel x dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang : 0,72486486486486...
   En utilisant le résultat de l'exercice 1, déterminer le rationnel représenté par cette suite décimale illimitée périodique.

7. *Approximation d'une racine carrée : méthode de Héron d'Alexandrie.*
   Soit a un nombre réel positif, et u_0 un nombre entier plus grand que $\sqrt{a}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.
   (a) Montrer que f est croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$.
   (b) Démontrer par récurrence la propriété : $\sqrt{a} < u_n < u_{n-1}$. En déduire que (u_n) est convergente.
   (c) Démontrer que la limite l de (u_n) vérifie : $f(l) = l$ et en déduire que $l = \sqrt{a}$.
   (d) Nous allons vérifier que la convergence de cette suite est très rapide. Vérifier l'égalité : $(u_{n+1} - \sqrt{a}) = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$. En déduire : $(u_{n+1} - \sqrt{a}) \leq (u_n - \sqrt{a})^2$. Expliquer pourquoi cette convergence "quadratique" implique que le nombre de décimales exactes de l'approximation de $\sqrt{a}$ par u_n double à chaque itération.
   (e) Ecrire une instruction Maple qui permet de calculer une approximation de $\sqrt{2}$ avec 32 décimales exactes.

Nous généraliserons ultérieurement cette méthode d'approximation qui est un cas particulier de la méthode de Newton (voir chapitre 3).
