

L'objet mathématique à la lumière de l'existentialisme thomiste

Damian RÖSSLER*

28 mars 2015

1 Introduction : le problème de l'universalité des mathématiques

Je voudrais d'abord rappeler à grands traits divers points de vue classiques sur la connaissance de l'objet mathématique. Ces points de vue furent explicitement ou implicitement débatus pendant la crise des fondements des mathématiques dans les années 1920 et 1930.

1) Le point de vue « platonicien » (Gödel, Bernays). C'est le point de vue selon lequel le mathématicien décrit une vérité supra-sensible, à laquelle il a un accès privilégié. Les mathématiques écrites ne sont qu'une transcription des acquis de cette connaissance directe des objets mathématiques. Ce point de vue, qui est le plus ancien a bien sûr sa racine dans la philosophie antique (Platon et aussi Aristote, via la critique de la doctrine platonicienne que l'on trouve dans la « Métaphysique ») et je vais longuement l'examiner plus tard.

2) Le point de vue kantien. C'est un point de vue qui a joué un rôle très important au 19ème siècle. Le mathématicien ne connaît pas d'objets mathématiques mais en revanche il fait des énoncés universels dont le contenu est justifié par les deux formes a priori de notre intuition : le temps et l'espace. Ces formes a priori de l'intuition contraignent notre intuition mais ne dépendent pas de son contenu. De ce fait elles donnent lieu à des énoncés à la fois universels et intuitifs, ou encore dans le langage kantien, des

*Institut de Mathématiques, Equipe Emile Picard, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, FRANCE, E-mail : rossler@math.univ-toulouse.fr

énoncés a priori qui sont aussi synthétiques. La forme du temps donne lieu aux énoncés arithmétiques alors que la forme de l'espace donne lieu aux énoncés géométriques.

3) Le point de vue logiciste (Russell, Frege, Whitehead). C'est le point de vue selon lequel il existe une logique universelle, qui précède toute expérience et contraint nos rapports avec la réalité. On s'applique à formaliser cette logique puis à montrer que les mathématiques dans leur intégralité sont un sous-produit de cette logique. Ici, comme chez Kant, le mathématicien ne connaît pas d'objets mathématiques ; il fait des énoncés justifiés par la logique.

4) Le point de vue formaliste (Hilbert). À grands traits, c'est un point de vue « concrétiste » qui demande la construction d'un système formel adéquat pour la pratique des mathématiques existantes. On ne s'inquiète pas de justifier la nature de ce système dans le cadre d'une théorie de la connaissance. Le statut épistémologique des mathématiques n'est pas vraiment clarifié ici, bien que Hilbert s'exprime sur ce sujet. Il semble cependant que la connaissance mathématique soit partiellement une connaissance du formalisme mathématique lui-même, qui acquiert une fonction symbolique importante.

5) Le point de vue intuitionniste (Brouwer, Heyting). C'est un point de vue partiellement hérité du Kantisme. Le mathématicien a une connaissance directe des objets mathématiques mais elle est contrainte par une forme de l'intuition qui ressemble au temps dans la philosophie de Kant. Cette contrainte implique qu'on ne peut faire que des énoncés « constructifs stricts » en mathématiques. La forme spatiale de l'intuition n'est pas reprise par Brouwer et cela le force à se lancer dans une reconstruction de la droite réelle à partir des principes de l'arithmétique constructive.

Il est intéressant de faire le point sur le statut actuel de tous ces points de vue dans la pratique des mathématiques. Je ne cherche pas ici à résumer les cinquante années de réflexion en philosophie des mathématiques qui ont suivi la crise des fondements, dont une partie se recoupe avec les développements en logique, en théorie des ensembles ou en théorie des modèles. Je voudrais essayer de résumer le point de vue d'un mathématicien engagé actuellement dans la recherche par rapport à la question du formalisme et par rapport à la question du statut épistémologique des mathématiques. Il me semble que l'on peut faire en toute justice les énoncés suivants :

1) Les travaux de Frege et de Russell-Whitehead ont mené à la mise en place d'un formalisme efficace, dont on ne peut plus se passer. On peut aller plus loin : ce formalisme est nécessaire et la recherche ne serait pas possible sans lui. Un grand nombre de contributions mathématiques très importantes du 19^{ème} siècle pouvaient se passer d'un formalisme bien établi car la nature exacte de ce formalisme pouvait en pratique res-

ter implicite, sans dommage ou contradiction. Ceci concerne par exemple les travaux en arithmétiques et une grande partie des travaux en théorie analytique des nombres. Cependant, l'architecture complexe de plusieurs constructions mathématiques modernes ne peut se faire sans avoir en main un formalisme parfaitement précis, pouvant se soumettre à des vérifications de type informatique.

2) La possibilité de pouvoir se référer à des systèmes formels va de pair pour le mathématicien avec la possibilité de définir sans remord ou anxiété des objets mathématiques nouveaux. Contrairement aux mathématiciens du début du 19^{ème} siècle, qui étaient tourmentés par le statut des nombres négatifs ou des nombres complexes, un mathématicien contemporain définira sans remord de nouveaux objets et sa bonne conscience est de fait ancrée dans le formalisme, qui lui permet de définir formellement ces objets, sans avoir à se soucier préalablement de leur stabilité épistémologique ou ontologique.

3) En revanche, le statut philosophique du formalisme est complètement obscur. De plus le problème de sa cohérence interne a priori est aussi grand ouvert, tout comme l'est le problème de la justification de son efficacité. D'une part le projet initial de Frege et Russell de justifier ce formalisme par une logique universelle et naturelle a échoué et d'autre part le travaux de Gödel ont ruiné tout espoir de montrer a priori que les énoncés qui pourraient intéresser le mathématicien sont formellement accessibles. Un exemple particulièrement criant de système formel dont le statut est complètement indéterminé est l'arithmétique de Peano. Le système des nombres naturels et son principe d'induction joue un rôle central mais on ne sait au fond pas d'où il vient et on ne sait pas si on peut lui faire confiance.

4) Si on les interroge sur l'objet de leurs travaux, la plupart des mathématiciens répondront que leurs investigations ont un objet et que le formalisme leur permet de décrire cet objet de la même manière que la langue permet de décrire un objet physique. Le structure du formalisme est un outil que l'on utilise pour dégager les propriétés de certains objets mathématiques ou de déterminer l'existence de certains phénomènes. La plupart des mathématiciens ont donc globalement un point de vue platoniste, qui est souvent inconscient ou non formulé. La justification kantienne, qui relie les mathématiques à la nature de l'espace et du temps aurait pu rester séduisante mais l'avènement des géométries non-euclidiennes et de la relativité restreinte ayant retiré son universalité à l'espace-temps, on préfère se rabattre sur un platonisme vague.

5) Le point de vue intuitioniste et constructiviste a eu initialement quelques suiveurs et des efforts ont été faits après la guerre (par exemple par Errett Bishop) pour repasser par les grand théorèmes de l'analyse réelle d'un point de vue constructif. Cependant, on

trouve à notre époque peu de mathématiciens se réclamant du constructivisme. Un point important est le fait que initialement les constructivistes refusaient l'axiome du choix, qui semblait représenter l'acte non-constructif par excellence : postuler la possibilité d'un choix dont le contenu reste inconnu. Cependant, la démonstration de l'indépendance de l'axiome du choix des autres axiomes (par Gödel et Cohen) de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel a historiquement retiré beaucoup de sens à ce refus. Par ailleurs, les tentatives de Heyting dans les années 1930 de formuler une logique intuitionniste n'ont pas vraiment abouti, car les logiques intuitionnistes se sont toutes avérées être équivalentes à la logique classique (à part éventuellement dans les cas où elle sont trop restreintes pour être utilisables).

Revenons maintenant sur les divers points de vue sur les mathématiques dont j'ai brièvement rappelé les tenants plus haut. Il est intéressant de constater que ces divers points de vue sont tous animés d'une certaine volonté, à savoir celle de trouver un moyen d'extraire la connaissance intellectuelle propre au mathématiques de l'expérience sensible. Que ce soit dans l'approche kantienne, formaliste, intuitionniste ou logiciste, il est toujours question de montrer que le contenu mathématique peut être séparé de la connaissance sensible, de manière à en faire quelque-chose de non-révisable par l'expérience. Dans le cas du platonisme, l'objet de la connaissance mathématique est en principe expérimental dans un monde supra-sensible mais les conditions de cette expérience sont obscures et la révisabilité expérimentale ne semble pas être considérée par les platonistes. Une critique de ce genre est adressée au platonisme par P. Benacerraf dans son article 'Mathematical truth'. Cette volonté peut se comprendre dans le contexte plus général du problème du statut de l'universel, qui est présent aux origines de la philosophie dans la pensée de Platon et d'Aristote. Il me semble donc que pour bien comprendre ce qui est en jeu, il est utile de revenir sur une petite partie de ce que ces deux philosophes ont à dire à ce sujet.

2 Quelques vues d'Aristote sur le statut de l'objet mathématique dans le livre XIII de la 'Métaphysique'

Je rappelle quelques éléments classiques de l'opposition de Platon et Aristote sur la question des idées et sur l'auto-critique de la théorie des idées que l'on trouve au début du 'Parménide' de Platon.

La question de base est la suivante. À la fois Platon et Aristote reconnaissent le fait que notre connaissance de la réalité sensible passe par la formation, ou la reconnaissance de

concepts universels. Dans les dialogues de la maturité de Platon (le Phèdre, le Ménon, le livre V de la République), est exposée de manière indirecte la théorie des idées. Cette théorie propose d'associer au monde sensible une deuxième réalité idéale, qui est entrevue, ou dont l'on se souvient (Ménon) lorsqu'on s'engage dans la connaissance sensible. L'aspect universel de notre connaissance du monde, ie le fait que nous reconnaissons des universels dans la réalité sensible, s'interprète alors comme une référence, ou une participation aux objets du monde idéal. Ainsi lorsqu'on reconnaît la forme triangulaire dans plusieurs figures triangulaires, on reconnaît (ou l'on se souvient de) l'idée du triangle sous-jacente à une multiplicité de représentations sensibles. Comme le dit Aristote (Métaphysique, XIII, 2) :

« The theory of Forms occurred to those who enunciated it because they were convinced as to the true nature of reality by the doctrine of Heraclitus, that all sensible things are always in a state of flux ; so that if there is to be any knowledge or thought about anything, there must be certain other entities, besides sensible ones, which persist. » (Aristote, Métaphysique, XIII, IV.2, trad. H. Tredennick, éd. Loeb (1935))

La critique qu'Aristote adresse à cette théorie est multiforme et se recoupe avec l'auto-critique de Platon que l'on trouve dans le Parménide. Voici un des arguments principaux contre la théorie des idées. Cette dernière propose que la reconnaissance d'une idée dans la réalité sensible consiste à établir un lien de participation entre un objet sensible et une idée. Cependant, pour établir un lien de participation, il faut reconnaître ce lien et il faudra donc que l'idée tout comme l'objet sensible participe à une autre idée, qui est le témoin de leur communauté. Ce processus doit ensuite continuer à l'infini, ce qui n'a pas de sens.

Le point de vue d'Aristote, que l'on trouve pas exemple exposé dans le De Anima, est très différent. Il repose en partie sur la théorie aristotélicienne de la puissance et de l'acte. En voici les tenants principaux :

- Les objets de notre connaissance se trouvent tous dans la réalité sensible. On les appelle des substances. Ce sont des unions de forme et de matière. La forme est en puissance dans la matière.
- Lorsque l'âme prend connaissance d'une substance, la forme est mise en acte par l'intellect agent. Cette mise en acte est l'équivalent aristotélicien de la reconnaissance de l'universel dans la théorie des idées.

Aristote reconnaît cependant à la fin du livre XIII de la métaphysique qu'il est difficile de donner une description convaincante de notre connaissance des substances, dans la

mesure où notre connaissance passe nécessairement par les universaux et que ces universaux ne reflètent pas la particularité, l'individualité des substances. Je cite la fin (célèbre) du livre XIII de la Métaphysique :

« The doctrine that all knowledge is of the universal, and hence that the principles of existing things must also be universal and not separate substances, presents the greatest difficulty of all that we have discussed ; there is, however, a sense in which this statement is true, although there is another in which it is not true. Knowledge, like the verb "to know," has two senses, of which one is potential and the other actual. The potentiality being, as matter, universal and indefinite, has a universal and indefinite object ; but the actuality is definite and has a definite object, because it is particular and deals with the particular. It is only accidentally that sight sees universal colour, because the particular colour which it sees is colour ; and the particular A which the grammarian studies is an A. For if the first principles must be universal, that which is derived from them must also be universal, as in the case of logical proofs ; and if this is so, there will be nothing which has a separate existence ; i.e. no substance. But it is clear that although in one sense knowledge is universal, in another it is not. » (Aristote, Métaphysique, XIII, X.7-9, trad. H. Tredennick, éd. Loeb (1935))

Par ailleurs, on trouve dans la Métaphysique une discussion fort intéressante du statut de l'objet mathématique. Voici un extrait du début du livre XIII de la métaphysique :

« Some say that mathematical objects, i.e. numbers and lines, etc., are substances ; and others again that the Ideas are substances. Now since some recognize these as two classes - the Ideas and the mathematical numbers - and others regard both as having one nature, and yet others hold that only the mathematical substances are substances, we must first consider the mathematical objects, without imputing to them any other characteristic - e.g. by asking whether they are really Ideas or not, or whether they are principles and substances of existing things or not - and merely inquire whether as mathematical objects they exist or not, and if they do, in what sense[...] (Aristote, Métaphysique, XIII, 1.3-4, trad. H. Tredennick, éd. Loeb (1935))

Voici deux points qui me semblent intéressants ici :

- L'objet mathématique devrait être une sorte d'universel, ou d'idée
- Certains penseurs veulent donner à l'objet mathématique une réalité supra-sensible, même s'ils acceptent d'abandonner le statut supra-sensible des formes

Tout se passe donc comme si les universaux mathématiques se comportaient comme les autres mais que leur "réalité", le fait qu'ils soient eux-mêmes des sortes de substance,

importe plus que pour les autres universaux.

De notre point de vue, c'est là le noeud de la discussion. Selon Aristote, les mathématiciens perçoivent des universaux tout comme les autres scientifiques (par exemple, les biologistes ou les physiciens) mais *leur connaissance a quelque-chose à faire avec le fait même qu'il s'agit d'universaux*. On ne peut donc passer facilement outre le problème épistémologique fondamental mentionné à la fin du livre XIII de la métaphysique, à savoir que notre connaissance des particuliers passe par les universaux. Ce problème pourrait être éventuellement laissé en suspens pour les autres sciences mais dans le cas des mathématiques il est lié à la nature même de l'activité. Les divers points de vue fondateurs en mathématique que l'on a résumés plus haut correspondent reflètent chacun une tendance gnoséologique plus générale, qui va au-delà des mathématiques. Le logicisme de Frege et Russell peut être vu dans le contexte du début de la philosophie analytique dans son ensemble (l'exemple le plus fort étant probablement le tractatus de Wittgenstein), l'interprétation kantienne est une partie intégrante de l'ensemble plus large de la doctrine de la Critique de la raison pure alors que le formalisme tombe sous la dénomination générale du nominalisme. Cependant, dans le cas des diverses interprétations de la nature des mathématiques, le fait que l'on ne parvient pas à une interprétation épistémologique satisfaisante ne peut être simplement ignoré. On ne peut décider de remettre à plus tard la solution de ce problème épistémologique épineux car c'est l'existence et la justification même de l'activité mathématique qui semble être en jeu. Si on ne résout pas le problème, il semble qu'on se retrouve dans le vide intégral ; contrairement aux autres sciences, qui peuvent se nourrir directement dans l'expérience, les mathématiques, dont l'activité est enracinée dans le fait que notre connaissance de la réalité est universelle, ne peuvent se satisfaire d'un 'muddle through' - si on ne peut les expliquer, il semble qu'elles perdent tout contenu.

Devant cet état de fait déplaisant, il me semble que la seule attitude possible est de se demander comment il faut comprendre le fait que les autres sciences puissent dans une certaine mesure se passer de justification. Afin de forcer une solution du problème, je propose d'adopter un point de vue radical, qui consiste à postuler que *la nature de la connaissance mathématique est la nature de la connaissance en général*. Autrement dit, toute forme de connaissance n'est que connaissance mathématique déguisée. Cette manière de penser a le mérite de nous pousser dans nos derniers retranchements. Nous allons donc nous poser la question de savoir s'il existe une connaissance non mathématique. S'il est possible de répondre clairement à cette question, on pourra espérer avoir appris quelque-chose sur la nature de la connaissance mathématique et de sa démarcation d'autres formes de connaissance.

3 La question de l'être

On peut commencer par se demander sans ambages : que veut-on dire exactement lorsqu'on dit que la physique part de la réalité sensible, du monde qui nous entoure ? Il semble de prime abord que cette question n'a pas de contenu car la réponse est d'une certaine façon contenue dans la question même. Cependant, si l'on examine le contenu des théories physiques, leur contenu est de fait exclusivement mathématique. La physique n'est qu'un ensemble de théories mathématiques. On ajoute ensuite habituellement qu'elles doivent modéliser la réalité, qu'elles sont sensées refléter. Cependant cette correspondance avec la réalité reste elle-même complètement informulée et elle ne fait pas partie de la physique. On pourrait donc argumenter de façon convaincante que la physique fait simplement partie des mathématiques, puisqu'aucun physicien ne pourra donner une explication physique du fait qu'une théorie physique *est physique*. Cette impossibilité a bien sûr déjà été remarquée par le passé dans un contexte plus général, notablement par Wittgenstein, lorsqu'il remarque que le fait qu'on sait qu'un énoncé est vrai ne peut être exprimé (dans sa critique de Frege et de son usage du signe introduisant une proposition). Cependant, cette vision de la physique trouvera en pratique peu de suiveurs. La physique, après tout, dira-t-on, décrit quelque-chose, pointe vers une réalité, quelles que soient les sophisteries qu'on pourrait opposer à cela. Autrement dit, la physique est justifiée et nourrie par un au-delà, inaccessible au discours et source de toute la variété du discours physique.

Pour bien comprendre les limites et le cadre d'un énoncé de ce type sur la physique, il me semble qu'il faut revenir d'abord au problème originaire de l'être, que l'on trouve déjà dans la préhistoire de la philosophie antique. La physique devrait pointer vers l'être - à défaut d'expliquer l'être comme concept ou comme universel, quelle attitude devons-nous adopter devant ce terme ?

4 Le problème de l'être dans « L'être et l'essence » d'E. Gilson

Le problème de l'être a une destinée particulière dans l'histoire de la philosophie occidentale. Cette destinée a été retracée par E. Gilson dans son livre 'L'être et l'essence.' Je voudrais ici mentionner quelques points importants de cet ouvrage.

- Le problème de l'être fait son apparition dans la pensée hellénique dans le poème de

Parménide. Ce texte a fait l'objet de multiples commentaires au cours de l'histoire, le premier étant indirectement le dialogue 'Parménide' de Platon. C'est là que sont discutées pour la première fois les 'antinomies de l'être'. En voici deux extraits (trad. P. Tannery) :

'Il n'est plus qu'une voie pour le discours, c'est que l'être soit ; par là sont des preuves nombreuses qu'il est inengendré et impérissable, universel, unique, immobile et sans fin...

Il n'a pas été et ne sera pas ; il est maintenant tout entier, un, continu. Car quelle origine lui chercheras-tu ? D'où et dans quel sens aurait-il grandi ? De ce qui n'est pas ? Je ne te permets ni de dire ni de le penser ; car c'est inexprimable et inintelligible que ce qui est ne soit pas.'

et

'S'il est devenu, il n'est pas, pas plus que s'il doit être un jour. Ainsi disparaissent la genèse et la mort inexplicables. Il n'est pas non plus divisé, car Il est partout semblable ; nulle part rien ne fait obstacle à sa continuité, soit plus, soit moins ; tout est plein de l'être...'

Le poème de Parménide est un texte assez cryptique mais à la suite de Platon, on peut l'interpréter à grand traits de la façon suivante. On ne peut parler que de ce qui est. Cependant lorsqu'on parle de ce qui est on parle en termes de différences, d'analogies, d'universaux mais dans la mesure où 'être' a une signification unique, cette différenciation est impossible car elle rompt l'unité de l'être. Même parler de l'unité de l'être est impossible car alors être et un différencieraient. La différence introduit un non-être dont on ne peut parler. Ce problème est aussi considéré par Platon dans sa critique de la théorie de la participation aux idées : la conception d'un monde en flux, comme le décrit Héraclite, où l'on reconnaîtrait des idées supra-sensibles qui constitueraient la véritable réalité sous-jacente n'a pas de sens car les phénomènes ne peuvent 'être moins'. Soit le monde sensible est soit il n'est pas mais alors on ne pourrait jamais en avoir parlé.

Il a semblé ainsi nécessaire de superposer à l'être une autre entité, qui ne peut pas elle-même être et qui permette de parler de l'être. Platon lui-même a suggéré le bien (...), une notion qui devient centrale plus tard chez Plotin (je me réfère toujours à E. Gilson, ne connaissant Plotin que très partiellement). Cette adjonction du bien est bien sûr très problématique et ne résout pas vraiment le problème de l'immobilité et de l'immutabilité de l'être.

- Le problème de l'être est repris dans la pensée de St Thomas d'Aquin, qui en donne une approche radicalement nouvelle. Ce penseur est, d'après Gilson le dernier avant Hei-

deger à vraiment se préoccuper de ce problème et à le mettre au centre de sa doctrine. Toujours selon ce dernier, le problème de l'être quitte progressivement la scène pendant les temps modernes, le dernier stade de cette évacuation étant le Hégélianisme.

5 Le problème de l'être selon St Thomas

Voici, encore une fois à grands traits, l'approche de St Thomas au problème de l'être.

À première vue, St Thomas adopte la plus grande partie de l'épistémologie aristotélicienne. La connaissance s'articule donc autour de la substance, qui est une union de forme et de matière (la notion de substance - 'ousia' - est un peu ambiguë chez Aristote mais nous allons nous baser sur cette définition). L'âme ne peut connaître que les substances et comme chez Aristote la forme, qui est puissance dans la matière, est mise en acte par l'âme. Il n'y a donc pas de théorie de la participation à des idées supra-sensibles chez St Thomas.

Le point où St Thomas diffère radicalement d'Aristote est sa compréhension de Dieu. Je rappelle que St Thomas propose cinq preuves (célèbres...) de l'existence de Dieu. Nous n'allons pas les passer toutes en revue mais nous allons d'abord expliquer la démonstration par Aristote de l'existence d'un premier moteur, puis rappeler la preuve de l'existence de Dieu de St Anselme et enfin décrire la réflexion de St Thomas sur ces deux démonstrations.

L'existence du premier moteur chez Aristote est une conséquence naturelle de sa conception de la physique. Le monde physique est selon lui gouverné par des relations d'acte et de puissance. Par exemple, un objet mû par un autre est en puissance par rapport au deuxième, qui est en acte par rapport au premier. Ceci mène à des chaînes de ce type de relation. Ces chaînes ne peuvent continuer à l'infini, car alors les actions que l'on voit dans le monde physique n'auraient pas d'origine. En conséquence, il existe un premier moteur, forcément immobile, qui est à l'origine de tout mouvement et toute action. Ce premier moteur peut être appelé Dieu (theos). Il ne joue en fait pas un rôle très important dans la philosophie d'Aristote et n'entretient aucun lien apparent avec la question de l'être. La preuve aristotélicienne de l'existence du premier moteur est reprise par St Thomas - avec une différence subtile, que nous n'avons pas le temps d'examiner ici - mais nous allons voir que ses vues sur le rôle de ce dernier sont très différentes.

La preuve de l'existence de Dieu donnée au 13ème siècle par St Anselme de Cantorbéry, qui a été très commentée par la suite est très différente et est fondée sur l'ordre des perfections. Voici un extrait du Proslogion, cité dans 'Le thomisme' d'E. Gilson (p. 57), qui

résume l'argument de St Anselme :

'Ce qui est l'être comme par définition est 'cela dont on ne peut rien concevoir de plus grand. Bien entendre ce cela, c'est entendre du même coup qu'il est de manière telle que, en même en pensée, il ne peut pas ne pas être. Celui qui comprend que Dieu est de cette manière, ne peut donc pas penser qu'il ne soit pas.'

L'argument de St Anselme est un cas extrême de ce que E. Gilson appelle 'l'essentialisme'. L'argument de St Anselme réduit l'existence de Dieu à son essence. Dieu doit exister car un être parfait doit avoir toutes les perfections et l'une de ces perfections est l'existence, ou l'être. Le problème de l'être est ici complètement évacué et Dieu, et par delà l'être du monde devient d'une certaine façon une fonction d'un discours. L'argument de St Anselme nous amène aussi très loin d'une conception religieuse d'un dieu révélé, sans pour autant contredire la possibilité d'une pareille révélation.

St Thomas s'oppose complètement à la preuve de St Anselme. Voici l'essentiel de son argumentation. Je cite à nouveau E. Gilson, dont je ne pourrais que mal paraphraser les explications :

'Si l'on part de ce principe qu'il y a un être tel qu'on ne peut rien concevoir de plus grand, il va de soi que cet être existe, mais son existence n'est évidente qu'en vertu de cette supposition. En d'autres termes, l'argument revient à dire qu'on ne peut pas comprendre que Dieu existe et concevoir en même temps qu'il n'existe pas. Mais on peut fort bien penser qu'il n'existe pas d'être tel qu'on n'en peut concevoir de plus grand. Bref, l'idée d'une existence n'est en aucun cas l'équivalent d'un existence. Une existence se constate ou s'infère, elle ne se déduit pas.' (E. Gilson, le Thomisme, p. 61).

Une fois l'argument de St Anselme réfuté, St Thomas procède ainsi :

'Après avoir établi qu'il existe une première cause, il [St Thomas] établira, en vertu des preuves mêmes de son existence, que cette première cause est l'être tel qu'on ne peut en concevoir de plus grand et que l'on ne saurait concevoir comme n'existant pas. L'existence de Dieu sera dès lors une certitude démonstrative, à aucun moment elle n'aura été l'évidence d'une démonstration.' (E. Gilson, le Thomisme, p. 64).

St Thomas rejette donc l'idée que l'existence de Dieu soit une fonction de son essence et plus généralement que la démonstration de son existence nous soit immédiatement accessible ou qu'elle soit évidente. Il faut d'abord démontrer l'existence d'un premier moteur et cette existence s'infère de ce que nous connaissons du monde sensible, le seul que nous puissions connaître.

L'existence de Dieu une fois démontrée, St Thomas le charge d'un lourd poids ontolo-

gique. Dans le cadre d'une autre preuve de l'existence de Dieu, celle par les degrés de l'être il remarque que les substances que nous connaissons ont toutes cette propriété qu'elles existent, mais que jamais leur existence ne découle de leur essence. Autrement dit, jamais on ne peut déduire (comme le fait par exemple St Anselme dans sa preuve de l'existence de Dieu) l'existence d'une substance de ce que l'on peut en dire. L'existence se surajoute à l'essence. Il dit ensuite que Dieu doit être la seule substance, dont l'essence est d'exister. L'existence de Dieu se confond donc avec son essence mais n'en suit pas. Ceci est l'interprétation par St Thomas de la phrase célèbre de Exode 3.14, dans la traduction de la vulgate : 'Eo sum qui sum.' [...Moïse dit à Dieu : J'irai donc vers les enfants d'Israël, et je leur dirai : Le Dieu de vos pères m'envoie vers vous. Mais, s'ils me demandent quel est son nom, que leur répondrai-je ? Dieu dit à Moïse : Je suis celui qui suis. Et il ajouta : C'est ainsi que tu répondras aux enfants d'Israël : Celui qui s'appelle "je suis" m'a envoyé vers vous...][trad. Segond].

St Thomas enracine ainsi sa théologie dans une préoccupation avec le problème de l'être et toute sa gnoséologie devient une fonction de cette préoccupation. Cet enracinement a une première conséquence capitale. Comme nous ne pouvons connaître que les substances sensibles, dont l'essence ne coïncide pas avec l'être, Dieu n'est pas directement connaissable et donc l'Être, ie Dieu, n'est connaissable qu'indirectement à travers l'être des substances sensibles. L'être du poème de Parménide ne peut donc être directement connu et les antinomies qui semblent accompagner la connaissance de l'être ne se posent donc pas. Par ailleurs, les substances sensibles sont toutes d'une certaine façon orientées par leur relation à l'existence. Dans une substance, on part de la matière pour aller vers la forme, puis vers l'être, qui est d'une certaine façon son couronnement. La forme de la substance est postérieure à son être et est en quelque sorte en puissance par rapport à elle. Du point de vue de la connaissance de la substance, ce point est central : la forme de la substance est en quelque sorte une référence en puissance, ou analogique, à son être. Autrement dit, la compréhension même de l'universalité de la forme d'une substance est comme un mouvement régressif par rapport à son être, qui n'est jamais appréhendé. Pour donner encore une autre description, probablement un peu bâtarde, on peut dire que la compréhension par les universels des substances est une compréhension métaphorique de leur être mais dans laquelle l'être n'est de fait pas présent. Le mouvement cognitif est comme un recul devant l'être de la substance.

On voit qu'on est ici aux antipodes d'une gnoséologie idéaliste, dans laquelle la connaissance est au contraire un mouvement vers l'être sous-jacent. Dans la théorie de la connaissance thomiste, l'être est donné avant tout et la connaissance s'éloigne d'une certaine façon de lui. Les substances 'participent' à l'être de Dieu (et le vocabulaire de la partici-

pation est effectivement utilisé par St Thomas) mais non à la manière de la participation à une idée mais plutôt comme un effet participe à une cause.

6 Retour sur l'objet mathématique

Il est intéressant maintenant de revenir vers le problème de l'existence des objets mathématiques et le problème concomitant de l'existence des universaux à la lumière de l'épistémologie thomiste. Rappelons quelques remarques que nous avons faites plus haut :

- 1) Le problème de la nature des mathématiques est fondamentalement lié, si ce n'est identique au problème de la nature des universaux.
- 2) Ce problème semble beaucoup plus brûlant dans le cas des mathématiques.
- 3) La nature d'un universel mathématique semble n'avoir de 'base' que lui-même ; on ne peut le soulager de son poids ontologique en l'association à une réalité sensible.

Il me semble que la philosophie thomiste explique la véritable nature du malaise que ces remarques véhiculent. En effet, l'existentialisme thomiste suggère que la possibilité d'un discours universel n'est possible que parce qu'il est une réaction à l'être, auquel il n'a en fait pas accès. Cette relation particulière à l'être est le 'poids ontologique' de tout discours universel et aucun discours universel n'a en fait d'enracinement naturel dans l'être des substances. De ce fait, il n'est pas possible de distinguer vraiment le discours des mathématiques du discours de la physique, par exemple, d'un point de vue épistémologique.

Il faut souligner à quel point ce point de vue diffère du point logiciste sur l'arithmétique développé par Frege. Pour ce dernier, les énoncés universels de la logique, dont les énoncés arithmétiques doivent former un sous-ensemble, ont un lien garanti avec la réalité. Dans le langage de la logique du premier ordre, cet enracinement passe par les noms des constantes ou des relations. C'est ce point de vue d'un langage naturellement enraciné dans la réalité qui est défendu dans le tractatus de Wittgenstein, dans le lequel cet enracinement a lieu à l'endroit des propositions 'atomiques'. Il n'est pas question de rentrer ici dans le détail de la réflexion de Wittgenstein sur ces propositions mais il me semble utile dans notre contexte de rappeler que pour ce dernier, l'existence de ces dernières étaient forcées par la structure du langage. Il ne s'agissait pas de constater leur existence ; pour Wittgenstein, leur existence étaient le résultat d'une analyse logique (voir par ex. le livre de E. Anscombe). Cependant, de son propre aveu il n'était pas capable d'en donner un seul exemple (cf. ses carnets). Cette impossibilité de trouver un exemple

est de mon point de vue, inspiré du thomisme, représentatif de la nature profonde de la logique ; à savoir qu'elle ne peut produire que des tautologies, mais que les tautologies forment la base naturelle de notre discours, dans la mesure où une tautologie *dit quelque-chose d'universel sans pour autant prétendre viser l'être des substances, qui n'est pas dans la ligne de mire de notre connaissance.*

Ainsi, l'existentialisme thomiste suggère une interprétation de la tautologie et de sa relation avec la réalité - c'est une relation indirecte, de nature métaphorique mais la tautologie n'a aucune autonomie par rapport à l'être. Il me semble que si l'on réfléchit à la pratique mathématique, c'est précisément cette dynamique de la tautologie qu'on y retrouve. Le 'platonisme vague' du mathématicien que je mentionnais plus haut, qui est à la fois engagé dans le formalisme et dans une croyance inexplicite en une réalité mathématique supra-sensible, me semble refléter assez précisément cette dynamique. Les tautologies du mathématicien n'ont de fait aucune autonomie, comme l'échec d'une justification formelle a priori de l'arithmétique ou de la théorie des ensembles le montre. Par ailleurs, les tautologies mathématiques sont fondamentalement engagées dans une réalité mais pas au moyen une fonction de 'désignation', de 'pointage' qui serait une partie intégrante de leur structure. Le malaise qui entoure son apparente croyance en une réalité supra-sensible est dû à un malentendu sur la relation des énoncés du mathématicien avec la réalité. Cette relation n'est pas donnée par avance, elle procède de la réalité de manière indicible.

Je veux donc souligner, ce qui pourra sembler paradoxal, que la véritable signification de la tautologie est à chercher dans une réflexion sur le problème de l'être. Une réflexion sur le langage a peu de chances, de mon point de vue, d'en donner une interprétation satisfaisante. Par ailleurs, les mathématiques sont fondamentalement 'révisables par l'expérience' mais en un sens bien différent de celui du positivisme logique. On doit voir cette révisabilité à l'oeuvre dans l'évolution historique des concepts mathématiques et l'extension constante du domaine de préoccupation du mathématicien (son aspect dialectique, ou mieux : herméneutique). Lorsqu'un mathématicien démontre un théorème, qu'est-ce qui le rend intéressant ? La réponse à cette question est floue et protéiforme et constitue le fondement expérimental des mathématiques.

7 L'un et le multiple

Il est intéressant aussi de revenir sur une préoccupation très ancienne à la lumière du nouveau point de vue sur l'être que propose que le thomisme. Il s'agit de la question du

statut des nombres par rapport à l'unité, ie leur relation à l'unité comme multiplicité. Le problème de la nature de la multiplicité et de l'unité se retrouve dans la philosophie de Platon et d'Aristote en plusieurs endroits. Je résume ici des constatations faites par ces derniers (dans le Parménide et la Métaphysique, notamment) :

1) On voudrait définir l'unité à l'endroit même où on commence à parler de l'être. En effet, l'être est un (cf. plus haut) et on voudrait l'identifier à l'être. Ceci préoccupe Aristote au début de la Métaphysique :

« Further, there is the hardest and most perplexing question of all : (x.) whether Unity and Being (as the Pythagoreans and Plato maintained) are not distinct, but are the substance of things ; or whether this is not so[...] »(Métaphysics III.i, trad. H. Tredennick)

2) Comme on l'a vu plus haut, cette identification est problématique car elle implique dès le départ la multiplicité même constituée par l'association de deux termes : l'un et l'être. Il faudrait donc trouver un moyen d'expliquer ce paradoxe. Je cite à ce sujet un passage du "Parménide" de Platon :

« Me voilà prêt, Parménide, dit alors Aristote ; car c'est moi que tu désignes, quand tu parles du plus jeune. Ainsi, interroge-moi, je te répondrai. - Soit. Si l'un existe, il n'est pas multiple ? - Comment en serait-il autrement ? - Il n'a donc pas de parties, et n'est pas un tout ? - Eh bien ! - La partie est une partie d'un tout. - D'accord. - Or, le tout n'est-il pas ce dont aucune partie ne manque ? - Évidemment. - Donc, de l'une et de l'autre manière, comme tout et comme ayant des parties, l'un serait formé de parties ? - Nécessairement. - Ainsi, de l'une et de l'autre manière, l'un serait multiple et non un. »(Platon, Parménide, 137c, trad. V. Cousin)

3) Si maintenant on accepte la possibilité de la multiplicité, comme définir les nombres ? Les définir comme union d'unités, on procédant de l'unité, semble problématique car alors on devrait considérer des copies de l'unité originelle et on ne voit pas comment on peut a priori comparer ces copies à l'unité fondamentale. Il y a plusieurs passages dans le livre XIII de la Métaphysique d'Aristote touchant ce point. Il est intéressant que ce problème se retrouve au fond à la fois dans l'échec de Frege de définir l'arithmétique au moyen de la logique et dans l'article de P. Benacerraff "What numbers could not be". En effet, la solution de Frege consistait à définir a priori les nombres comme classes d'équipollence d'ensembles de même cardinalité. Cette définition est contradictoire à cause du paradoxe de Russell, qui montre que la théorie des ensembles sous-jacente à cette définition n'est cohérente. En conséquence, on se retrouve dans une situation où on ne sait plus a priori comparer la cardinalité de deux ensembles quelconques, ce qui constitue le problème pointé par Benacerraff.

4) La multiplicité est associée au monde sensible. En effet le signe du "monde en flux" d'Héraclite est le multiple. Le problème du statut de la multiplicité est donc au centre de la critique d'Aristote à la théorie des idées de Platon. On voudrait derrière la multiplicité du sensible retrouver des idées et en dernier ressort l'être véritable, signe que cette multiplicité "n'est pas". Cependant, comme on l'a vu plus haut, ce traitement du monde n'a pas de sens, car soit le monde sensible est soit il n'est pas. On doit donc accepter la multiplicité et de ce fait les nombres et accepter qu'ils rendent compte de multiplicités physiques.

5) Le nombre doit être considéré comme un universel, même s'il n'est pas clair pour Aristote comment on peut le voir comme la forme d'une substance. Dans les contextes de la théorie de la connaissance d'Aristote, cela signifie que les nombres sont fondamentalement engagés dans la réalité sensible, à la manière des formes et qu'ils n'ont pas d'existence séparée, ce qui est compatible avec le fait qu'on ne parvient pas de manière évidente à les définir comme entités séparées.

La réflexion sur le statut des nombres relie donc directement le problème du statut des universels à un problème ontologique. Le rapport de l'un au multiple est emblématique du problème du rapport des universels à la réalité. L'énoncé "l'être est un" résume le rapport de l'universel à l'être mais par ailleurs, comme on l'a vu, cet énoncé est problématique. Le point de vue thomiste mène à concevoir l'un de l'être à la façon d'un universel thomiste, qui de ce fait n'ajoute rien à l'être mais est posé par l'être. Je cite encore E. Gilson

« Est-ce à dire qu'on puisse employer indifféremment les deux termes, et dire *un* au lieu de dire *être*? Nullement. Il en est de l'un comme du bien; ce n'est pas l'un qui est, c'est l'être qui est un, comme il est bon, vrai et beau. Ces propriétés, que l'on nomme souvent les *transcendentes*, n'ont de sens et de réalité qu'en fonction de l'être, qui les pose toutes en se posant. Ce n'est pas parler en vain que de dire : l'être est un, car bien que l'un n'ajoute rien à l'être, notre raison ajoute quelque-chose à la notion d'être en le concevant comme indivis. »

Par ailleurs St Thomas dit :

« Certains, pensant que l'un qui est convertible avec l'étant est identique à l'un principe du nombre, se sont divisés à partir de là en positions contraires. Pythagore et Platon se rendant compte que l'un convertible avec l'étant n'ajoute à l'étant rien de positif, mais signifie la substance même de l'étant en tant qu'elle est indivise ont estimé qu'il en va de même pour l'un qui est le principe du nombre. Et parce que le nombre est composé d'unités, ils ont cru que les nombres étaient les substances mêmes de toutes choses. A l'opposé, Avicenne, considérant que l'un principe du nombre ajoute quelque chose de

positif à la substance de l'étant (sans quoi le nombre, composé d'unités, ne serait pas une espèce de la quantité), crut que l'un convertible avec l'étant ajoute quelque chose de positif à la substance de l'étant, comme être blanc ajoute à homme. Mais cela est évidemment faux. Car chaque chose est une en raison de sa propre substance. En effet, si elle était une par quelque autre chose, comme cette chose aurait son unité elle aussi, il faudrait en expliquer l'unité par une chose nouvelle, et l'on irait ainsi à l'infini. On doit donc s'arrêter au début, et dire que l'un convertible avec l'étant n'ajoute à l'étant rien de positif, mais que l'un principe du nombre ajoute à l'étant un accident appartenant au genre quantité. »(St Thomas, *Summa Theologiae*, I, 11, 1, trad. dominicaine (1984))

Cette distinction de St Thomas entre l'un ontologique d'avec l'un mathématique et sa description historique de la confusion entre les deux peut être interprétée comme une explication profonde est extrêmement comprimée de la nature historique et philosophique des mathématiques. Culturellement, cette dernière représente une entreprise qui pointe et force des questions épistémologiques profondes mais stricto sensu, l'entreprise universaliste des mathématiques ne diffère d'aucune autre : en effet, l'un mathématiques n'a en fin de compte pas un statut privilégié. Autrement dit, l'entreprise mathématique n'est qu'un resserrement pratique autour de notre "activité universalisante", qui traverse tous nos processus cognitifs et cette activité est complètement conditionnée par notre relation à l'être.