La conjecture de Manin-Mumford
(d'après Richard Pink et Damien Roessler)

Lettre électronique adressée par J. Oesterlé à D. Roessler le 20 décembre 2002

Soient K un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et A une variété abélienne sur K. *L'adhérence de Zariski d'une partie* S *de* $\mathrm{A(K)}$ est la plus petite sous-variété fermée Y de A telle que $\mathrm{S} \subset \mathrm{Y(K)}$. Une sous-variété fermée Z de A est dite *spéciale* si elle est réunion d'une famille finie de translatées de sous-variétés abéliennes de A.

Théorème 1. — *Soit* X *une sous-variété de* A. *L'adhérence de Zariski de* $\mathrm{X(K)} \cap \mathrm{A(K)}_{\mathrm{tors}}$ *est une sous-variété spéciale de* A.

1. Sous-variétés spéciales de A

Disons qu'un endomorphisme F d'une variété abélienne est une *isogénie spéciale* si F et les $\mathrm{F}^r - 1$, pour $r \geq 1$, sont des isogénies.

Proposition 1. — *Soit* F *une isogénie spéciale de* A. *Toute sous-variété fermée* Z *de* A *stable par* F *est spéciale.*

Chaque composante irréductible de Z est stable par une puissance de F. On peut donc supposer Z irréductible ; le morphisme $\mathrm{F_Z} : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ induit par F est alors surjectif. Notons G le stabilisateur de Z dans A (opérant par translations) ; il est stable par F.

a) Cas où $\mathrm{G} = 0$. Les variétés $\mathrm{Z} + a$, où $a \in \operatorname{Ker} \mathrm{F}$, sont alors deux à deux distinctes et ce sont les composantes irréductibles de $\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{Z})$. Le morphisme $\mathrm{F_Z}$ est donc birationnel. La relation $\mathrm{G} = 0$ implique que Z est une variété de type général (Ueno), donc n'a qu'un nombre fini m d'automorphismes birationnels (Matsumura). Alors $\mathrm{F}_{\mathrm{Z}}^m$ est le morphisme identique de Z, et comme $\mathrm{F}^m - 1_{\mathrm{A}}$ est une isogénie, Z est réduite à un point.

b) Cas général. L'isogénie F' de $\mathrm{A/G}$ déduite de F par passage au quotient est spéciale ; en appliquant a) à $\mathrm{A/G}$, $\mathrm{Z/G}$, F', on voit que Z est un translaté de G.

2. Action de Galois sur les points de torsion de A

Disons qu'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}]$ est *spécial* s'il est unitaire et que ses racines dans $\mathbf{C}$ sont distinctes de 0 et des racines de l'unité.

Proposition 2. — *Choisissons un modèle* $\mathrm{A_L}$ *de* A *sur un corps* $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ *de type fini sur* $\mathbf{Q}$. *Le groupe* $\mathrm{Aut_L(K)}$ *opère alors dans* $\mathrm{A(K)}$. *Il existe un polynôme spécial* $\mathrm{P} \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}]$ *et* $\sigma \in \mathrm{Aut_L(K)}$ *tels que* $\mathrm{P}(\sigma)$ *annule* $\mathrm{A(K)_{tors}}$.

Choisissons une $\mathbf{Z}$-algèbre intègre de type fini R, de corps des fractions L, et un schéma abélien $\mathrm{A_R}$ sur R, de fibre générique $\mathrm{A_L}$. Soit S le spectre du localisé de R en un idéal maximal. Notons s le point fermé de S, t son point générique, $\bar{s}$ un point géométrique de S localisé en s et $\bar{t}$ le point géométrique de S localisé en t défini par le plongement $\mathrm{L} \to \mathrm{K}$. Notons g l'image canonique dans $\pi_1(\mathrm{S}, \bar{s})$ de l'élément de Frobenius de $\pi_1(\mathrm{Spec}(k(s)), \bar{s})$, f une flèche du groupoïde fondamental de S reliant $\bar{t}$ à $\bar{s}$ (il en existe car S est connexe) et $h \in \pi_1(\mathrm{S}, \bar{t})$ le conjugué de g par f. Enfin, soit τ un antécédent de h par l'homomorphisme canonique $\mathrm{Aut_L(K)} \to \pi_1(\mathrm{S}, \bar{t})$ (qui est surjectif).

Notons $\mathrm{A_S}$ le schéma abélien sur S déduit de $\mathrm{A_R}$ par changement de base. Sa fibre en s est une variété abélienne sur le corps fini $k(s)$, dont l'endomorphisme de Frobenius φ est une isogénie spéciale. Le polynôme caractéristique Q de φ est spécial, et l'on a $\mathrm{Q}(\varphi) = 0$. Pour tout entier n premier à la caractéristique p de $k(s)$, le noyau $\mathrm{A_S}[n]$ de la multiplication par n dans $\mathrm{A_S}$ est un revêtement étale de S, g opère sur sa fibre géométrique en $\bar{s}$ comme φ, donc $\mathrm{Q}(g)$ annule cette fibre et $\mathrm{Q}(h)$ annule la fibre géométrique de $\mathrm{A_S}[n]$ en $\bar{t}$. Il en résulte que $\mathrm{Q}(\tau)$ annule les points de $\mathrm{A(K)_{tors}}$ d'ordre premier à p.

En partant d'un autre idéal maximal de R, de caractéristique résiduelle distincte de p, on construit de manière analogue un élément τ' de $\mathrm{Aut_L(K)}$ et un polynôme spécial $\mathrm{Q}' \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}]$ tel que $\mathrm{Q}'(\tau')$ annule les points de $\mathrm{A(K)_{tors}}$ d'ordre une puissance de p. Soit E (resp. E′) la plus petite extension de L contenue dans K sur laquelle les points de $\mathrm{A(K)_{tors}}$ d'ordre premier à p (resp. d'ordre une puissance de p) sont rationnels. L'extension $\mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$ de L est de degré fini (Serre). Soit d son degré. Quitte à remplacer τ et τ' par leurs puissances d-ièmes (et Q, Q′ par les polynômes unitaires dont les racines sont les puissances d-ièmes de celles de Q et Q′), on se ramène au cas où τ et τ' fixent $\mathrm{E} \cap \mathrm{E}'$. Il existe alors un élément σ de $\mathrm{Aut_L(K)}$ qui coïncide avec τ dans E et τ' dans E′. Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{QQ}'$ est spécial et $\mathrm{P}(\sigma)$ annule $\mathrm{A(K)_{tors}}$.

3. Démonstration du théorème 1

Choisissons des modèles de A et X sur un sous-corps L de K, de type fini sur Q, de sorte que $\mathrm{Aut_L(K)}$ opère dans $\mathrm{A(K)}$ et stabilise $\mathrm{X(K)}$. Soient $\sigma \in \mathrm{Aut_L(K)}$ et $\mathrm{P} \in \mathbf{Z}[\mathrm{T}]$ satisfaisant les conclusions de la prop. 2. Écrivons $\mathrm{P} = \mathrm{T}^n - (a_{n-1}\mathrm{T}^{n-1} + \ldots + a_0)$ et notons F l'endomorphisme de A^n représenté matriciellement par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{P}(\mathrm{F}) = 0$. Comme le polynôme P est spécial, F est une isogénie spéciale de A^n.

Pour tout $x \in \mathrm{X}(\mathrm{K}) \cap \mathrm{A}(\mathrm{K})_{\mathrm{tors}}$, notons $u(x)$ le point $(x, \sigma(x), \dots, \sigma^{n-1}(x))$ de $\mathrm{A}^n(\mathrm{K})$. Soit Y l'adhérence de Zariski dans A^n de l'ensemble de ces points. On a $\mathrm{F}(u(x)) = u(\sigma(x))$ parce que $\mathrm{P}(\sigma)$ annule x. Donc F stabilise Y. Il résulte de la prop. 1 que Y est une sous-variété spéciale de A^n. L'adhérence de Zariski de $\mathrm{X}(\mathrm{K}) \cap \mathrm{A}(\mathrm{K})_{\mathrm{tors}}$ est la première projection de Y, donc est une sous-variété spéciale de A.