Lambda structure en K-théorie des fibrés algébriques hermitiens

Note de Damien Roessler

Présentée par Jean-Michel Bismut

Résumé

Étant donné un schéma X de type fini sur $\mathbb{Z}$ et de fibre générique lisse, on étudie le groupe de Grothendieck des fibrés algébriques sur X, munis d'une métrique hermitienne sur le fibré holomorphe associé sur les points complexes de X. On montre que les puissances extérieures et le produit tensoriel confèrent à ce groupe une structure de λ-anneau spécial.

Lambda structure in the K-theory of hermitian algebraic fibre bundles

Abstract

Given a scheme of finite type over $\mathbb{Z}$ with smooth generic fiber, we study the Grothendieck group of algebraic vector bundles on X endowed with a hermitian metric on the associated holomorphic bundle on the complex points of X. We prove that the exterior powers and the tensor product give to this group the structure of a special λ-ring.

1 Préliminaires

Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{Z}$ et de fibre générique lisse. On notera $X(\mathbb{C})$ la variété analytique des points complexes de X. La conjuguaison complexe induit un automorphisme antiholomorphe F_∞ de $X(\mathbb{C})$. On définit $A^{p,p}(X)$ comme l'ensemble des formes différentielles réelles ω de type p,p sur $X(\mathbb{C})$ satisfaisant à l'équation $F_\infty^*\omega = (-1)^p\omega$ et l'on note $Z^{p,p}(X) \subseteq A^{p,p}(X)$ le noyau de l'opération $d = \partial + \overline{\partial}$. On pose également $\tilde{A}(X) = \bigoplus_{p\geq 0}(A^{p,p}(X)/(Im\partial + Im\overline{\partial}))$ et $Z(X) = \bigoplus_{p\geq 0} Z^{p,p}(X)$. On appelle **fibré hermitien** $\overline{E} = (E,h)$ la donnée d'un fibré vectoriel algébrique E sur X et d'une métrique hermitienne h, invariante par F_∞, sur le fibré holomorphe $E_\mathbb{C}$ sur $X(\mathbb{C})$ associé à E. On note $ch(\overline{E})$ le représentant du caractère de Chern associé par les formules de Chern-Weil à la connexion holomorphe hermitienne définie par h. Si $\mathcal{E} : 0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ est une suite exacte de fibrés algébriques sur X et $\overline{\mathcal{E}}$ la donnée de $\mathcal{E}$ et de métriques hermitiennes sur $E'_{\mathbb{C}}$, $E_{\mathbb{C}}$ et $E''_{\mathbb{C}}$ (invariantes par F_∞), on dispose de trois fibrés hermitiens $\overline{E}'$, $\overline{E}$ et $\overline{E}''$ et d'une classe caractéristique secondaire de Bott et Chern $\tilde{ch}(\overline{\mathcal{E}}) \in \tilde{A}(X)$; pour la définition, nous référons à [3, Par. f)].

Définition 1.1 *Le groupe de Grothendieck arithmétique $\widehat{K}_0(X)$ associé à X est le groupe engendré par $\tilde{A}(X)$ et par les classes d'isomorphismes isométriques de fibrés hermitiens sur X, soumis aux relations suivantes:*

(a) *Pour toute suite exacte $\overline{\mathcal{E}}$ comme ci-dessus, on a $\tilde{ch}(\overline{\mathcal{E}}) = \overline{E}' - \overline{E} + \overline{E}''$*

(b) *Si $\eta \in \tilde{A}(X)$ est la somme de deux éléments η' et η'', alors $\eta = \eta' + \eta''$ dans $\widehat{K}_0(X)$.*

Considérons le groupe $\Gamma(X) = Z(X) \oplus \tilde{A}(X)$. On le munit de la graduation dont le terme de degré p est $Z^{p,p}(X) \oplus \tilde{A}^{p-1,p-1}(X)$ si $p \geq 1$ et $Z^{0,0}(X)$ si $p = 0$. On définit une application bilinéaire $*$ de $\Gamma(X) \times \Gamma(X)$ vers $\Gamma(X)$ par la formule

$$(\omega, \eta) * (\omega', \eta') = (\omega \wedge \omega', \omega \wedge \eta' + \eta \wedge \omega' + (dd^c\eta) \wedge \eta')$$

Rappelons que $d^c = \frac{1}{4\pi i}(\partial - \overline{\partial})$. Cette application fait de $\Gamma(X)$ une $\mathbb{R}$- algèbre graduée commutative (cf. [2, Lemma 7.3.1, p. 233]). Il existe donc une unique structure de λ-anneau spécial sur $\Gamma(X)$ telle que pour tout entier $k \geq 1$, la k-ième opération d'Adams associée agit par la formule $\psi^k(x) = \sum_{i\geq 0} k^i x_i$, où x_i désigne la composante de degré i de l'élément $x \in \Gamma(X)$. Pour la définition du terme λ-*anneau spécial*, voir [1, Exposé V].

Définition 1.2 *Si $\overline{E} + \eta, \overline{E}' + \eta'$ sont deux générateurs de $\widehat{K}_0(X)$, le produit $\otimes$ est donné par la formule*

$$(\overline{E} + \eta) \otimes (\overline{E}' + \eta') = \overline{E} \otimes \overline{E}' + [(ch(\overline{E}), \eta) * (ch(\overline{E}'), \eta')]$$

où $[.]$ désigne la projection sur la seconde composante de $\Gamma(X)$. Si $k \geq 0$, on pose

$$\lambda^k(\overline{E} + \eta) = \lambda^k(\overline{E}) + [\lambda^k(ch(\overline{E}), \eta)]$$

où $\lambda^k(\overline{E})$ est la k-ième puissance extérieure de $\overline{E}$ et $\lambda^k(ch(\overline{E}), \eta)$ désigne l'image de $(ch(\overline{E}), \eta)$ par la k-ième λ-opération de $\Gamma(X)$.

H. Gillet et C. Soulé ont montré dans [2, Th. 7.3.4, p. 235] que $\otimes$ et λ^k sont compatibles aux relations définissant le groupe $\widehat{K}_0(X)$ qui se trouve ainsi muni d'une structure de pré-λ-anneau, i.e. les relations

(1) $\lambda^0(x) = 1$, $\lambda^1(x) = x$

(2) $\lambda^k(x + y) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i(x)\lambda^{k-i}(y)$

sont vérifiées pour tout $x, y \in \widehat{K}_0(X)$ et $k \geq 1$.

2 Représentations hermitiennes

On désignera par $\mathbf{G} = \mathbf{GL}_n \times \mathbf{GL}_m$ le produit des schémas en groupes linéaires de rangs n et m sur $\mathbb{Z}$. Pour tout élément $M = A \times B$ de $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C})$, on note M^* le produit $A^* \times B^*$ des adjointes de A et de B.

Définition 2.1 *Soit V un $\mathbf{G}$-module libre de rang fini sur $\mathbb{Z}$ et*

$$r : GL_n(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C}) \to Aut_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$$

la représentation complexe associée. Une métrique h sur $V_{\mathbb{C}}$ sera dite admissible *si pour tout élément M de $GL_n(\mathbb{C}) \times GL_m(\mathbb{C})$ l'image $r(M^*)$ de M^* par la représentation r est l'adjointe pour la métrique h de l'endomorphisme $r(M)$. On dira alors que le couple $\overline{V} = (V, h)$ est un $\mathbf{G}$-module hermitien.*

Définition 2.2 *Le groupe de Grothendieck $\widehat{R}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G})$ est le groupe engendré par les $\mathbf{G}$-modules hermitiens soumis à la relation $(V, h) = (V', h') + (V'', h'')$ s'il existe une suite exacte de $\mathbf{G}$-modules $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ telle que h' soit la restriction de h à $V'_{\mathbb{C}}$ et que le morphisme $V \to V''$ induise une isométrie du complément orthogonal de $V'_{\mathbb{C}}$ dans $(V_{\mathbb{C}}, h)$ avec $(V''_{\mathbb{C}}, h'')$.*

Si $\overline{V}$ et $\overline{V}'$ sont des $\mathbf{G}$-modules hermitiens, on montre que les métriques sur les $\mathbf{G}$-modules $V \otimes V'$ et $\lambda^k(V)$ déduites canoniquement de celles sur $\overline{V}$ et $\overline{V}'$ sont admisssibles et définissent ainsi des $\mathbf{G}$-modules hermitiens $\overline{V} \otimes \overline{V}'$ et $\lambda^k(\overline{V})$. Par ailleurs, on désigne par $\overline{id}_n$ la représentation identique de $\mathbf{GL}_n$, munie de la métrique standard et par $\overline{id}_n \times 1$ le produit de $\overline{id}_n$ avec la représentation triviale de $\mathbf{GL}_n$. On définit de même la représentation $1 \times \overline{id}_m$ de $\mathbf{G}$.

Proposition 2.3 *Les opérations $\otimes$ et λ^k munissent $\widehat{R}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G})$ d'une structure de λ-anneau spécial. Cet anneau est isomorphe au localisé*

$$\widehat{K}_0(Spec\ \mathbb{Z})[X_1, \dots X_n, Y_1, \dots Y_m]_{X_n, Y_m}$$

de l'anneau de polynômes $\widehat{K}_0(Spec\ \mathbb{Z})[X_1, \dots X_n, Y_1, \dots Y_m]$ par rapport à X_n et Y_m, par l'application qui envoie X_i sur $\lambda^i(\overline{id}_n \times 1)$ et Y_j sur $\lambda^j(1 \times \overline{id}_m)$ et qui envoie la classe d'un $\mathbb{Z}$-module hermitien (libre, de rang fini) dans $\widehat{K}_0(Spec\ \mathbb{Z})$ sur celle du $\mathbf{G}$-module hermitien muni de l'action triviale qui lui correspond.

Outre (1) et (2), $\widehat{R}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G})$ vérifie donc les relations suivantes:

(3) $\lambda^k(x.y) = P_k(\lambda^1(x), \dots \lambda^k(x), \lambda^1(y), \dots \lambda^k(y))$

(4) $\lambda^k(\lambda^l(x)) = P_{k,l}(\lambda^1(x), \dots \lambda^{kl}(x))$

pour tout $k, l \geq 1$ et $x, y \in \widehat{R}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G})$, où P_k et $P_{k,l}$ sont des polynômes universels à coefficients entiers. L'énoncé de la proposition précédente est comparable à celui de [4, 3.8, p. 52].

Proposition 2.4 *Soient $\overline{E}$, $\overline{E}'$ des fibrés hermitiens de rangs n, m sur X. Il existe alors un unique morphisme de pré-λ-anneaux $\widehat{r}_{\overline{E},\overline{E}'} : \widehat{R}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}) \to \widehat{K}_0(X)$ tel que $\widehat{r}_{\overline{E},\overline{E}'}(\overline{id}_n \times 1) = \overline{E}$ et $\widehat{r}_{\overline{E},\overline{E}'}(1 \times \overline{id}_m) = \overline{E}'$.*

On trouvera une assertion analogue à celle de cette dernière proposition à la p. 393 de [1]. Grâce à la proposition 2.3, elle permet de montrer que les relations (3) et (4) ont encore lieu quand x et y sont des classes dans $\widehat{K}_0(X)$ de fibrés hermitiens $\overline{E}$ et $\overline{E}'$. Un calcul direct montre que ces relations sont aussi satisfaites quand x ou y est un élément de $\tilde{A}(X)$. On en déduit le résultat suivant:

Théorème 2.5 *Le λ-anneau $\widehat{K}_0(X)$ est spécial.*

Nous avons appris peu avant la publication de cette note que ce résultat avait également été obtenu par A. Meissner dans le cas où X est supposé projectif. Cf. A. Meissner, Arithmetische K-Theorie (non-publié), Diss. Univ. Regensburg (1993). Pour prouver la proposition 2.3, on procède en trois étapes:

(a) On prouve que les opérations λ^k munissent $\widehat{R}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G})$ d'une structure de pré-λ-anneau.

(b) On montre l'analogue de la proposition pour le tore des matrices diagonales de G, puis pour l'anneau $\widehat{R}_{\mathbb{Q}}(G)$, défini comme $\widehat{R}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G})$ en remplaçant l'anneau de base $\mathbb{Z}$ par les nombres rationels $\mathbb{Q}$.

(c) On détermine le noyau de l'application $\widehat{R}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}) \to \widehat{R}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{G})$, ce qui permet de conclure.

References

[1] L. Illusie, A. Grothendieck, P. Berthelot. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. *Springer Lecture Notes 225* (1971).

[2] C. Soulé, H. Gillet. Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics i, ii. *Annals of Mathematics*, 131:163–203, 205–238 (1990).

[3] C. Soulé, J.-M. Bismut, H. Gillet. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles i, ii, iii. *Comm. Math. Physics*, 115:49–78, 79–126, 301–351 (1988).

[4] J.-P. Serre. Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés. *Publications mathématiques de l'IHES* (1967).