Equations de Hamilton-Jacobi : aspects lagrangiens, comportement en temps long, liens avec le transport optimal.

Cours avec P. Bernard

GDR CHANT - du 28/08/06 au 01/09/06.

But du cours : décrire comment des idées récentes, issues des systèmes dynamiques (sous l'impulsion, en particulier, d'Albert Fathi) ont permis de comprendre plus en profondeur la structure des solutions d'une ~~éq~~ classe d'équations d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, Du) = 0.$$

Ces solutions peuvent avoir 2 descriptions possibles : solutions de viscosité, et solutions "lagrangiennes" — i.e. solutions explicites impliquant un lagrangien et des courbes caractéristiques —. On expliquera ces deux aspects et on donnera

2 applications : — comportement en grand temps et classification des solutions stationnaires.

— Existence et propriétés qualitatives de solutions au pb de transport optimal pour des fonctions coût spéciales.

Ces 2 applications feront l'objet des séances 2 et 3. La séance 1 est consacrée à des "rappels" sur les solutions de viscosité d'équations de HJ et leurs expressions explicites.

Références biblio.

- DL²: Generalised solutions of HJ equations, Pitman (1982).
- Barles: Solutions de viscosité d'équations de HJ, Springer (1994).
- Fathi: Weak KAM theorem in Lagrangian dynamics, Cambridge University Press.

Séance 1. "Rappels" sur les solutions de viscosité d'équations de HJ du 1er ordre et leur représentation.

Pb étudié : le pb de Cauchy pour

$$(HJ) \cdot \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + H(x, Du) = 0. & t > 0,\ x \in \mathbb{T}^N. \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

donnée initiale continue.

Ce pb a évidemment, en général, zéro solution classique et beaucoup de solutions faibles. La théorie de Crandall-Lions sur les solutions de viscosité permet de sélectionner une classe de solutions pour lesquelles le pb de Cauchy est bien posé (i.e. existence, unicité, stabilité par rapport à la donnée initiale).

Ces solutions admettent des représentations explicites quand le hamiltonien a de bonnes propriétés de convexité.

Hypothèses faites sur H.

- $(x, p) \longmapsto H(x, p)$ est au minimum lipschitz, et le plus souvent C^∞.

- $\forall x \in \mathbb{T}^N$, $p \mapsto H(x,p)$ est convexe.

le plus souvent : strictement convexe, i.e :

$\exists \alpha > 0$ tel que $H_{pp}(x,p) \geq \alpha I$, $\forall x$.

- La stricte convexité entraîne la coercivité :

$$\lim_{|p| \to +\infty} \frac{H(x,p)}{|p|} = +\infty .$$

Quand on ne supposera pas la stricte convexité, on supposera H coercif.

<u>Plan</u>. I). Aspect " solution de viscosité ".

II). Aspect lagrangien.

I). Aspect " solution de viscosité ".

On considère, pour un instant seul^t, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(x, u, Du) = 0 \; ; \quad u(0,x) = u_0(x) . \quad (1)$$

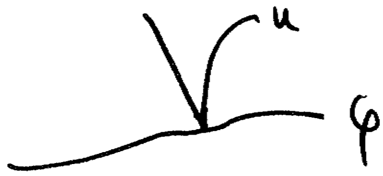
F continue.

<u>déf</u>. $u(t,x) \in C(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}^N)$ est sous-solution

de viscosité de (1) si : $\forall \varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}^N)$,

$\big((t_0, x_0)$ est un minimum de $u - \varphi\big)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x_0) + F(x_0, u(t_0, x_0), Du(t_0, x_0)) \geq 0.$$



déf. sous-solution : min $\to$ max. $\geq \;\to\; \leq$.

déf. solution : sur et sous solution.

Propriétés (sans démonstration).

1. (Stabilité). $(F_n)_n$ converge vers F dans $C(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$; $(u_n)_n$ suite de solutions de viscosité de $u_t + F_n(x, u, Du) = 0$ convergeant unif^t vers $u \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^N)$.
   Alors u est sdv de
$$u_t + F(x, u, Du) = 0.$$

2. Supposons u local^t lipschitz sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}^N$. Alors u est pp différentiable et (1) est vraie p.p.

Propriétés supplémentaires de
$$u_t + H(x, Du) = 0$$

3. $u_{10} \leq u_{20}$ dans $C(\mathbb{T}^N)$.
u_1 et u_2 : 2 solutions issues de u_{10} et u_{20}. Alors $u_1 \leq u_2$.

Ceci permet (modulo l'existence d'une solution au pb d'évolution) de définir un semi-groupe :
$$u(t,x) = (\mathcal{T}(t)u_0)(x)$$
$\Leftrightarrow$ u est solution de (HJ).

4. (Contraction faible). $(u_{10}, u_{20}) \in C(\mathbb{T}^N)^2$.
Alors $\|\mathcal{T}(t)u_{10} - \mathcal{T}(t)u_{20}\|_\infty \leq \|u_{10} - u_{20}\|_\infty$.

__Rq__. $N = 1$, $H(x,p) = H(p)$.
Une solution de viscosité de
$$u_t + H(u_x) = 0$$
est une primitive d'une sol. entropique de
$$v_t + \partial_x H(v) = 0.$$

– La notion principale de la théorie est celle de l'unicité. Un exemple est le suivant (on le traite car il va servir bientôt) :

$$H(x, Du) + u = 0 \; ; \; x \in \mathbb{T}^N . \quad (*)$$

<u>prop.</u> (Crandall – Lions). $\bar{u}$ (resp $\underline{u}$) sur (resp sous) solution de viscosité continue pour $(*)$. Alors $\underline{u} \leq \bar{u}$.

<u>preuve</u>. Si $\underline{u}$, $\bar{u}$ vérifiaient l'Ep. au sens classique on regarderait le min de $\bar{u} - \underline{u}$. Malheureusement c'est impossible...

$$u_\varepsilon(x, y) = \bar{u}(x) - \underline{u}(y) + \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon^2} .$$

$(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$: pt de min de u_ε.

En regardant la définition de $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$:

- $\dfrac{|y_\varepsilon - x_\varepsilon|^2}{2\varepsilon^2} \longrightarrow 0$.
- $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \longrightarrow x$. point de min de $\bar{u} - \underline{u}$.

$$\varphi_y(x) = \underline{u}(y) - \frac{|y-x|^2}{2\varepsilon^2} \; ; \; \& \; x_\varepsilon \text{ est un}$$

min pour $\bar{u} - \varphi_{y_\varepsilon}$.

$$H\left(x_\varepsilon, \frac{-x_\varepsilon + y_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) + \bar{u}(x_\varepsilon) \geq 0 .$$

$$\varphi_x(y) = \bar{u}(x) + \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon^2}.$$

y_ε point de max pour $u - \varphi_{x_\varepsilon}$:

$$H\left(y_\varepsilon, \frac{y_\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) + \underline{u}(y_\varepsilon) \leq 0 .$$

La coercivité donne $\left|\frac{y_\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right| \leq C$

Donc : $H\left(y_\varepsilon, \frac{y_\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) = H\left(x_\varepsilon, \frac{y_\varepsilon - x_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) + o(1).$

Soustraction, $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \bar{u}(x_0) - \underline{u}(x_0) \leq 0$ ∎

<u>Extension</u> (sans preuve). Résultat vrai si

|| $\bar{u}$ est une sur-solution s.c.i. et $\underline{u}$ une sous solution s.c.s.

scs. $\liminf_{y \to x} u(y) = u(x)$

sci : $\limsup_{y \to x} u(y) = u(x)$

But de cette section : démontrer le

<u>Th.</u> (Lions-Papanicolaou-Varadhan). $\exists ! \lambda_0 /$

|| Le pb $\begin{cases} H(x, Du) = \lambda . \\ x \in \mathbb{T}^N \end{cases}$ a des solutions $\Leftrightarrow \lambda = \lambda_0$.

Lemme. $\forall \varepsilon > 0$, le pb $\begin{cases} H(x, Du) + \varepsilon u = 0. \\ x \in \mathbb{T}^N \end{cases}$

admet une unique solution de viscosité.

$\delta > 0$, le pb $\begin{cases} -\delta \Delta u + H(x, Du) + \varepsilon u = 0. \\ x \in \mathbb{T}^N \end{cases}$

admet une unique solution (méthode des sur - sous solutions).

Lemme. (Barles - Perthame).

$$\bar{u}_*(x) = \liminf_{\substack{y \to x \\ \delta \to 0}} u^\delta(y)$$

$$\underline{u}(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ \delta \to 0}} u^\delta(y)$$

$\bar{u}$ est une sous - solution scs.

$\underline{u}$ est une sur - solution sci.

preuve. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{T}^N)$ et x_0 un point de ~~max~~ ~~strict~~ de $\underline{u} - \varphi$. Par définition, il existe $x_\delta \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} x_0$ tel que x_δ est un p^t de max de $u^\delta - \varphi$. Soit donc :

$$-\delta \Delta \varphi(x^\delta) + H(x^\delta, D\varphi(x^\delta)) + \varepsilon u^\delta(x^\delta) \leq 0.$$

$$\delta \to 0 : \quad H(x_0, D\varphi(x_0)) + \bar{u}(x_0) \leq 0. \quad \blacksquare$$

Existence de v : exercice !

Conclusion : $\bar{u} \leq \underline{u}$, or unicité $\Rightarrow \bar{u} \geq \underline{u}$. Donc $\underline{u} = \bar{u}$. On récupère en prime la cv. u.

Lemme. u est lipschitz.

preuve. $x_0 \in \mathbb{T}^N$; $x \longmapsto u(x) - u(x_0) - K|x - x_0|$.

Soit $\hat{x}_0$ un pt de max qui n'est pas x_0. Alors $x \longmapsto u(x_0) + K|x - x_0|$ est une fct test : Donc (coercivité)

$$H\left(\hat{x}_0, K \frac{\hat{x}_0 - x_0}{|\hat{x}_0 - x_0|}\right) + u(x_0) \leq 0$$

: K contrôlée. $\boxtimes$

Preuve du théorème.

$$H(x, Du^\varepsilon) + \varepsilon u^\varepsilon = 0 \; ; \; x \in \mathbb{T}^N.$$

1. $\|u^\varepsilon\|_\infty \leq \dfrac{\|H(\cdot, 0)\|_\infty}{\varepsilon}$.

2. $v^\varepsilon = u^\varepsilon - u^\varepsilon(0)$;

$$H(x, Dv^\varepsilon) + \underbrace{\varepsilon v^\varepsilon}_{\text{borné}} = - \underbrace{\varepsilon u^\varepsilon(0)}_{\text{borné}}.$$

v^ε lipschitz $\Rightarrow$ éq. vraie pp donc $\|Dv^\varepsilon\| \leq C$.

3. $-\varepsilon' u^{\varepsilon'}(0) \longrightarrow \lambda$. $(v^\varepsilon)_{\varepsilon'}$ cv u sur $\mathbb{T}^N$.

Stabilité $\Rightarrow$ $\begin{cases} H(x, Dv) = \lambda \\ x \in \mathbb{T}^N \end{cases}$.

Unicité. $-\lambda t + v(x)$ solution de HJ avec donnée initiale v...

On souhaite étudier le comportement $t \to +\infty$ de (HJ). ~~Le~~ Le $1^{\underline{o}}$ terme du dvt en temps est $-\lambda$; on pose donc $u = \lambda t + v$, $H = H - \lambda$; $u := v$ et $H := H - \lambda$. On ~~est~~ Si u_0 est donnée initiale, v solution de $H = 0$, alors pour $C > 0$ assez grand :

$$v - C \leq u_0 \leq v + C.$$

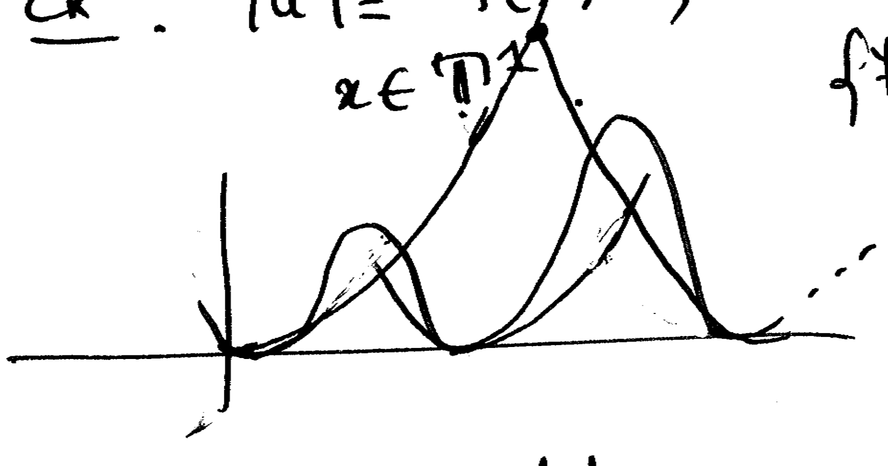
Par le pp de comparaison :

$$v - C \leq \cancel{\mathcal{S}}\,\mathcal{S}(t)u_0 \leq v + C. \quad \text{(pourvu}$$

que $\mathcal{S}(t)u_0$ existe ...).

Question : a-t-on $\mathcal{S}(t)u_0 \longrightarrow$ une solution stationnaire ? Pb : $\times$cité des solutions stationnaires.

Ex. $|u'| = f(x)$; $x \in \mathbb{T}^1$. $f(x) \geq 0$. $\{f = 0\} \neq \emptyset$.



$\wedge$: OK.

$\vee$: NON.

Ex - (Namah - R ; 1997).

$$u_t + |Du| - f(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{T}^N.$$

$$f \geq 0 ; \quad \{f=0\} \neq \emptyset.$$

1. $u \downarrow$ sur $\{f=0\}$.

2. $\begin{cases} |Du| - f(x) = 0. \\ v \text{ imposée sur } \{f=0\} \end{cases}$

Montrer que ce pb a au plus une solution.

Ind : $w = -e^{-v}$ (transformée de Kruzhkov)

$$|Dw| + f(x) w = 0.$$

3. $u_\varepsilon(t,x) = u\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right)$.

$$\varepsilon \partial_t u_\varepsilon + |Du^\varepsilon| - f = 0.$$

$$\bar{u} = \liminf_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ s \to t}} u^\varepsilon(s,x).$$

$$\underline{u} = \limsup_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ s \to t}} u^\varepsilon(s,x).$$

Utiliser 2. + Barles - Perthame.

Ce théorème se généralise à pas mal de hamiltoniens (ex : hamiltoniens convexes réversibles) mais laisse de côté les hamiltoniens généraux.

Le but du restant de la séance et de celle qui suit est de combler ce gap.

A partir de maintenant :

$\boxed{\text{on suppose } H \text{ strictement convexe et } C^\infty}$

II). L'aspect lagrangien.

Au hamiltonien H on associe traditionnellement le lagrangien L donné par :

$$L(x,v) = \sup_{p\in\mathbb{R}^N} \left(p\cdot v - H(x,p) \right).$$

La stricte convexité de H assure les propriétés suivantes de L :

- L existe, est C^∞ en x et v, unif^t strictement convexe.
- $v \longmapsto L_v(x,v)$ est un C^∞- difféo de $\mathbb{R}^N$.
- $H(x,p) = \sup_{v\in\mathbb{R}^N} \left(p\cdot v - L(x,v) \right)$. De plus $p \mapsto H_p(x,p)$ est un C^∞- difféo de $\mathbb{R}^N$, et $H_p = (L_v)^{-1}$.

Dans le cadre C^∞, ces résultats se démontrent avec la TFI, la stricte convexité et un peu d'huile de coude. On peut généraliser au cas non lisse...

1°). La formule de Lax-Oleinik.

Soit $u_0 \in C(\mathbb{T}^N)$; on pose (provisoire !)

$$LO(t)u_0 = \inf_{\gamma(t)=x} \left(u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma,\dot\gamma)\,ds \right)$$

où l'inf est pris sur tous les chemins γ C^1 par morceaux, tracés sur $\mathbb{T}^N$.

Nous allons passer 30 mn à montrer que [i] cette formule définit bien qq^c ; [ii] elle peut nous aider...

[i]. Cette formule définit bien quelque chose.

$$LO(t)u_0 = \inf_{y\in\mathbb{T}^N} \inf_{\substack{\gamma(t)=x\\ \gamma(0)=y}} \left(u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma,\dot\gamma)\,ds \right)$$

$$= \inf_{y\in\mathbb{T}^N} \left(u_0(y) + \inf_{\substack{\gamma(t)=x\\ \gamma(0)=y}} \int_0^t L(\gamma,\dot\gamma)\,ds \right).$$

Ce pb se décompose en

- un pb de minimisation sur $\mathbb{T}^N$ (facile)

– le pb de minimiser une action lagrangienne. Toute personne ayant suivi (subi..) un cours de mécanique connaît ce pb...

<u>Th.</u> Le problème

minimiser $\int_0^t L(\gamma,\dot{\gamma})\,ds$ sur les chemins C^1 par morceaux tq $\gamma(0)=y$, $\gamma(t)=x$ (t, x, y fixés) admet au moins une solution γ.

De plus

- $\exists\, C_t > 0$ tel que $|\dot{\gamma}| \leq C_t$.
- $\gamma \in C^2([0,t])$.

Résultat pas si facile que ça à prouver pour un lagrangien quelconque, strict^{t} convexe.

Idée d'une <u>preuve pour</u> :

$$C(|v|^p - 1) \leq L(x,v) \leq C(|v|^p + 1).$$

$$|L_x|, |L_{xx}| \leq C(C + L).$$

$$|v L_v| \leq C(C+L).$$

1. Soit $(\gamma_n)_n$ une suite minimisante. Alors $\int |\dot{\gamma}_n|^p \leq C$ donc compacité de $(\gamma_n)_n$ dans $C^0([0,t])$ fort / $W^{1,p}$ faible. Soit γ une limite ; $\gamma \in C([0,t])$; $\dot{\gamma} \in L^p([0,t])$.

2. Convexité :

$$\int_0^t L(\hat{\gamma}_n, \dot{\gamma}_n)\, ds \geq \int_0^t L(\gamma,\dot\gamma) + \int_0^t L_x(\gamma,\dot\gamma)(\gamma_n-\gamma)$$

$\to 0$ par cv forte.

$$+\int_0^t \underbrace{L_v(\gamma,\dot\gamma)(\dot\gamma_n-\dot\gamma)}_{\to 0 \text{ par cv faible}} + \int L_{xx}(qqc, qqc)\cdot|\gamma_n-\hat{\gamma}_n|^2 .$$

Donc $\int_0^t L(\gamma,\dot\gamma)$ minimise l'action.

3. Equation d'Euler :

$$\frac{d}{ds}\left(L_v(\gamma,\dot\gamma)\right) - \underbrace{L_x(\gamma,\dot\gamma)}_{\in L^1([0,t])} = 0 .$$

Donc $L_v(\gamma,\dot\gamma)\in L^\infty([0,t])$, donc $\dot\gamma\in L^\infty$...

Bootstrap.

[ii]. $LO(t)u_0$ est la solution cherchée.

Th. $LO(t)u_0$ est solution de viscosité de $(\mathbb{T}^N)$, $t>0$.

$$\begin{cases} u_t + H(x,Du) = 0 . \\ u(0,x) = u_0(x) . \end{cases}$$

preuve. · Donnée initiale : facile, en exo.

· Sur-solution. $u(t,x) := LO(t)u_0$.

Soit $\varphi\in C^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}^N)$; $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{T}^N$ p^t de minimum de $u-\varphi$. supposé nul.

Soit γ une extrémale pour u correspondant à (t_0, x_0) :

$$u(t_0, x_0) = u_0(\gamma(0)) + \int_0^{t_0} L(\gamma, \dot\gamma)\, ds.$$

Pour tout t autour de t_0 :

$$u(t, \gamma(t)) \leq u_0(\gamma(0)) + \int_0^{t} L(\gamma, \dot\gamma)\, ds$$

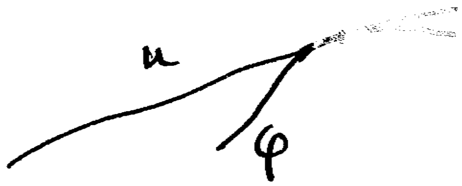
par déf. de u.

D'autre part

$$u(t, \gamma(t)) \geq \varphi(t, \gamma(t))$$

pour tout t autour de t_0.

<u>Donc</u> : $$\frac{d}{dt}\left(u_0(\gamma_0) + \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds - \varphi(t, \gamma(t)) \right)\Big|_{t = t_0} \leq 0.$$



$$0 \geq L(\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)) - \varphi_t(t_0, \gamma(t_0)) - D\varphi(t_0, \gamma(t_0)) \cdot \dot\gamma$$

Soit encore :

$$\varphi_t(t_0, x_0) + D\varphi(t_0, x_0) \cdot \dot\gamma(t_0) - L(\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)) \geq 0$$

ce qui implique :

$$\varphi_t(t_0, x_0) + \sup_v \left(D\varphi(t_0, x_0) \cdot v - L(x_0, v) \right) \geq 0.$$

$$\varphi_t(t_0, x_0) + H(x_0, D\varphi(x_0)) \geq 0$$

- <u>Sous-solution</u>. Cette fois-ci, (t_0, x_0) est un point de minimum de $u - \varphi$.

– la formule de Lax – Oleinik vérifie la propriété de semi-groupe :

$$LO(t+s)u_0(x) = \inf_{\gamma(t+s)=x} \left(u_0(\gamma(0)) + \int_0^{t+s} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds \right)$$

$$= \inf_{\substack{\gamma(\sigma)=\gamma_1(\sigma-s)\ \gamma_1(t)=x \\ \text{pour } \sigma \geq s}} \left(u_0(\gamma(0)) + \int_0^{s} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds + \int_0^t L(\gamma_1,\dot\gamma_1)\,ds \right)$$

$$= \inf_{\gamma_1(t)=x} \left(\inf_{\gamma(s)=\gamma_1(0)} \left(u_0(\gamma(0)) + \int_0^{s} L(\gamma,\dot\gamma) \right) + \int_0^t L(\gamma_1,\dot\gamma_1) \right)$$

$$= \inf_{\gamma_1(t)=x} \left(LO(s)u_0(\gamma_1(0)) + \int_0^t L(\gamma_1,\dot\gamma_1)\,ds \right)$$

$$= LO(t)LO(s)u_0(x).$$

– Soit $v \in \mathbb{R}^N$, pour $t \leq t_0$ proche de t_0 on définit

$$\gamma(s) = x_0 - (t_0-s)v.$$

$\gamma(t) = x$, donc, par la formule de semi-gpe :

$$u(t_0,x_0) \leq u(t, x_0 - (t_0-t)v) + \int_t^{t_0} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds.$$

$$\leq \varphi(t, x_0 - (t_0-t)v) + \int_t^{t_0} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds.$$

Et donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi(t, x_0 + (t_0-t)v) + \int_t^{t_0} L(\gamma,\dot\gamma)\,ds\right)\Big|_{t=t_0} \leq 0 .$$

$$\Longrightarrow$$

$$\varphi_t(t_0,x_0) + D\varphi(t_0,x_0).v - L(x,v) \leq 0 .$$

Formule vraie $\forall v$; donc :

$$\varphi_t + \sup_v \left(D\varphi(t_0,x_0).v - L(x,v)\right) \leq 0. \blacksquare$$

Et donc $LO(t)u_0 = \mathcal{T}(t)u_0$; on adopte cette formule à partir de maintenant.

<u>Exemple</u>. $H(x,p) = |p|^2$ -

Alors $L(x,v) = \dfrac{|v|^2}{4}$ et :

$$\mathcal{T}(t)u_0 = \inf_{y\in\mathbb{T}^N}\left(u_0(y) + \frac{|x-y|^2}{4t}\right).$$

(inf - convolution de u_0 par $\dfrac{|v|^2}{4}$).

2°). <u>Propriétés qualitatives</u> - (lipschitz + $C^{1,1}$).

On pourrait faire le calcul tout de suite. Toutefois, pour préparer la séance 3 (et aussi un peu la séance 2 ...) on fait un détour par la théorie des fct$^{\text{s}}$ semi-concaves.

<u>prop. et déf.</u> Soit B une boule de $\mathbb{R}^N$ et soit $u : B \to \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

[i]. $u = v + \varphi$, avec φ régulière et v concave.

[ii]. $\forall x \in B$ $\exists\, l_x \in \mathbb{R}^N$ tel que : $\exists\, K > 0$ tel que : $\forall y \in B$,

$$u(y) \leq u(x) + l_x \cdot (y - x) + K|y - x|^2.$$

Une telle fct$^{\text{e}}$ est dite semi-concave.

<u>preuve.</u> [i] $\Rightarrow$ [ii] trivial.

[ii] $\Rightarrow$ [i] : $\varphi(x) = -2K|x|^2$;

$$(u+\varphi)(y) - (u+\varphi)(x)$$

$$\leq \cancel{u(x) +}\ l_x \cdot (y - x) + K|x - y|^2$$

$$2K\, x \cdot (y - x) - K|x - y|^2$$

$$= (l_x - 2Kx) \cdot (y - x).$$

En chaque point, le graphe de u est au-dessous d'un hyperplan tangent. Donc u est concave. ▨

(Preuve de cette dernière assertion)

$$z := tx + (1-t)y \ ;$$

$$t(u(x) - u(z)) \leq t\, l_z(x - z),$$

$$(1-t)(u(y) - u(z)) \leq (1-t)\, l_z(y - z).$$

$$t\,u(x) + (1-t)u(y) - u(z) \leq l_z \cdot (tx + (1-t)y - z) = 0 \ . \ \square$$

Corollaire. Soit u semi-concave sur B. Alors u est localt lipschitz sur B, et donc différentiable p.p. sur B.

déf. u ~~semi-convexe~~ $\Leftrightarrow -u$ semi-concave.

Remarque. La propriété de semi-concavité [ii] (resp. semi-convexité) est ponctuelle. Elle n'a, bien sûr, d'intérêt que sur des ensembles assez gros. Toutefois, on peut s'en servir.

prop. Soit $u : B \to \mathbb{R}$ semi-concave. Soit F un compact de $\mathbb{R}^N$, $\subset B$, tel que u soit semi-convexe sur F de constante K.
Alors $u \in C^{1,1}(F)$ (i.e. ≠tiable

11 sur F, de différentielle lipschitz).

<u>preuve</u>. Soit $x \in F$. Par semi convexité et concavité : $\forall h \in \mathbb{R}^N$,

$$u(x+h) \leq u(x) + l_x \cdot h + K|h|^2.$$
$$u(x+h) \geqslant u(x) + m_x \cdot h - K|h|^2$$

$$0 \leq (l_x - m_x) \cdot h + K|h|^2.$$

Donc $l_x = m_x$, et u $\neq$tiable en x de gradient l_x.

Soit maintenant $\left(\begin{matrix} y \in F \\ h \in \mathbb{R}^N \end{matrix}\right)$; écrivons

$$|u(x+h) - u(x) - Du(x) \cdot h| \leq K|h|^2.$$
$$|u(x) - u(y) - Du(y) \cdot (x-y)| \leq K|x-y|^2$$
$$|u(y) - u(x+h) + Du(y) \cdot (x+h-y)| \leq K|x+h-y|^2$$

$$|(Du(y) - Du(x)) \cdot h| \leq 3K|h|^2 + 3K|x-y|^2.$$

Il suffit maintenant de prendre

$h = |x-y| e$; e un vecteur unitaire. ☒

<u>Applications</u>.

<u>Th. 1</u>. Soit $u(t,x)$ la solution de (HJ) avec donnée initiale C^0. Alors u est

localt lipschitz sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}^N$. De plus, $\forall t > 0$, $u(t,.)$ est semi-concave.

Rq. Régularisation instantanée, du même type que les équations paraboliques.
⚠ On ne peut pas aller plus loin que Lipschitz, sauf points particuliers.

preuve. • Soit $t > 0$, $x \in \mathbb{T}^N$, $y \in \mathbb{T}^N$; γ : extrémale adaptée à (t,x) :

$$u(t,x) = u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma, \dot\gamma)\, ds.$$

Soit $\tilde\gamma(s) = \gamma(s) + \frac{s}{t}(y-x)$. On a : $\tilde\gamma(t) = y$.

Donc :

$$u(t,y) \leq u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\tilde\gamma, \dot{\tilde\gamma})\, ds.$$

$$\int_0^t L(\tilde\gamma, \dot{\tilde\gamma})\, ds = \int_0^t L\left(\gamma + \frac{s}{t}(y-x), \dot\gamma + \frac{1}{t}(y-x)\right) ds$$

$$\leq \int_0^t \left(L_x(\gamma,\dot\gamma)\frac{s}{t}(y-x) + L_v(\gamma,\dot\gamma) \cdot \frac{y-x}{t}\right) ds$$

$$+ C_t |y-x|^2.$$

Or on se souvient que : $L_x(\gamma,\dot\gamma) = \frac{d}{ds} L_v(\gamma,\dot\gamma)$.

$$\int_0^t L(\tilde\gamma,\dot{\tilde\gamma})\,ds \leq \int_0^t \left(s\,\frac{dL_v}{ds} + L_v\right) ds \cdot \frac{y-x}{t}$$

$$= \int_0^t \frac{d}{ds}(s L_v)\,ds \cdot \frac{y-x}{t}$$

$$= L_v(\gamma(t),\dot\gamma(t)) \cdot (y-x).$$

<u>Conclusion</u>.

$$u(t,y) - u(t,x) \leq L_v(x,\dot\gamma(t))\cdot(y-x) + C_t\,|y-x|^2.$$

– on voit directement le caractère lipschitz- (remplacer y par x ; $|L_v(x,\dot\gamma)| \leq C$).

– on a la semi-concavité.

• <u>Régularité lipschitz en temps</u>.

• $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}^N$, γ adaptée ~~a(t,x)~~ à (t,x).

• t' dans un voisinage de t :

$$u(t,x) = u_0(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma,\dot\gamma)\,ds.$$

On considère alors la courbe

$\tilde\gamma(s) = \gamma\left(\frac{t}{t'}s\right)$. On a :

$$\tilde\gamma(0) = \gamma(0)\ ; \quad \tilde\gamma(t') = \gamma(t) = x.$$

Donc $u(t',x) \leq u_0(\gamma(0)) + \int_0^{t'} L(\tilde\gamma,\dot{\tilde\gamma})\,ds.$

Un calcul stupide utilisant $\gamma, \dot\gamma, \ddot\gamma$ bornés, L_v borné le long de $(\gamma, \dot\gamma)$ donne :

$u(t,x) - u(t',x) \leq C_t \, |t - t'|$. ▨

<u>Corollaire</u>. (HJ) a lieu presque partout.

Pour terminer, quelques résultats classiques

<u>prop. 1</u>. Supposons $u(t,x)$ différentiable au point $x = \gamma(t)$.
Alors $Du(t, \gamma(t)) = L_v(\gamma(t), \dot\gamma(t))$.

<u>preuve</u>. Examiner

$$u(t, y) \leq u(t, \gamma(t)) + L_v(x, \gamma(t)) \cdot (y - x) + O(|y-x|^2).$$

Si u est ≠tiable en $(\gamma(t))$, alors $L_v(\gamma(t), \dot\gamma(t))$ est le seul gradient possible. ▨

<u>prop. 2</u>. $u(t,x)$ est lipschitz sur $\mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{T}^N$, donc différentiable p.p.
Donc $Du(t,x) = L_v(x, \dot\gamma(t))$ si γ est adaptée à x.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - H_p(t, Du(t,x))$$ en un point de différentiabilité.

Posons $X(t) = \gamma(t)$.

$\mathcal{P}(t) = L_v(\gamma(t), \dot\gamma(t))$.

. L'équation sur les extrémales donne :

$\frac{d}{dt}(L_v) = L_x$, donc :

$\dot{\mathcal{P}}(t) = L_x(\gamma(t), \dot\gamma(t))$.

Or, la transformée de Legendre donne

$$p \cdot v(p) = L_{\cancel{x}}(x, \cancel{p}\, v(p)) + H(x, p).$$

où $v(p)$ est un point de minimum pour

$$v \longmapsto p \cdot v - L(x, v).$$

Il en résulte $H_{\cancel{x}}(x, p) = - L_x(x, v(p))$.

. D'autre part on a :

$$\dot\gamma(t) = H_p(\gamma(t), L_v(\gamma(t), \dot\gamma(t))).$$

$$= H_p(X(t), \mathcal{P}(t)).$$

$$= \dot X(t).$$

On obtient donc que $\left(\gamma(t), \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot\gamma(t))\right)$ vérifie le système hamiltonien classique

$$\begin{cases} \dot X = H_p(X, \mathcal{P}). \\ \dot{\mathcal{P}} = - H_x(X, \mathcal{P}). \end{cases}$$