Dynamique des fronts de réaction - diffusion.

Cours Ecole du non linéaire.

Peyresq - Septembre 2008.

But du cours -

Comprendre les phénomènes de propagation dans les équations de réaction - diffusion scalaires. Ce type d'équation a la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + V(x) \cdot \nabla u = f(x, u). \qquad (1)$$

t : variable temporelle.

x : variable spatiale.

$u(t,x)$: température, concentration (ondes chimiques), densité d'espèces (modèles d'invasions biologiques) inconnue réelle.

Avant de donner plus précisément le champ d'application de ce type d'équation, ainsi que le type de question, donnons la propriété principale avec laquelle on va tt faire : le ppe du maximum.

Supposons qu'on résolve le pb de Cauchy pour (1) avec 2 données initiales :

$$u_1(0,x) \quad \text{et} \quad u_2(0,x).$$

Si $u_1(0,\cdot) \leq u_2(0,\cdot)$ alors cet ordre est respecté tt au long de l'évolution, i.e.

$$u_1(t,x) \leq u_2(t,x).$$

(pourvu que l'équation ait des sol., mais ce sera tjs le cas ici et on ne s'embêtera pas avec les pbs d'existence).

Cette propriété est vraie pour des équations <u>scalaires</u> et quelques systèmes très particuliers. Ceci restreint donc la classe de modèles qu'on peut regarder, mais cette propriété supplémentaire permet l'accès à des informations qualitatives <u>globales</u>, hors de tt cadre perturbatif. Il est même surprenant de voir à quel point l'injection de cette info permet d'aller loin, et on s'en servira sans vergogne.

Domaines d'application des équations de réaction - diffusion.

- <u>Théorie des flammes.</u> $u(t,x)$ est un champ de température, $f(x,u) = f(u)$ est un terme de cinétique chimique censé représenter tte la cinétique (vu de loin c'est assez vrai) et $V(x)$ un champ de vitesses imposé.

- <u>Modèles en biologie et en écologie</u> : $u(t,x)$: densité d'une espèce animale ou végétale ayant une propension naturelle à se répandre, et on cherche à mesurer à quel rythme l'expansion a lieu. Sans entrer dans la modélisation : $f(u)$ est le taux de naissance ; on suppose en plus que l'espèce diffuse.
  Quand f est inhomogène (i.e. dépend de x de façon non triviale) ceci modélise des hétérogénéités de l'environnement ; en général la structure spatiale n'a aucun caractère périodique, quasi-périodique, etc.
  Les modèles sont heuristiques mais sont souvent acceptés comme de bons modèles qualitatifs.

<u>Question qu'on se pose</u> : 1. comment représente-t-on la propagation ?

Dans les cas les plus simples : onde progressive, i.e. une sol. de la forme

$$\varphi(x + c\vec{e}\,t) .$$

Toutefois quand il n'y a aucune structure spatiale, on voit bien que la notion n'est pas pertinente. On peut ttefois la généraliser en la notion de front de transition ; on verra que, au moins dans le cas des équations scalaires, c'est la bonne notion.

2. Est-ce que ces ondes représentent bien tte la dynamique ? Dans les équations de réaction-diffusion, il se trouve qu'elles sont très sympathiques, i.e. elles attirent en général tte la dynamique. Nous verrons pourquoi ; c'est là encore dû au principe du maximum

Il y a ~~t~~ toutefois des sournoiseries et nous examinerons (si le temps le permet) un modèle dans ce sens (i.e. un modèle de type KPP).

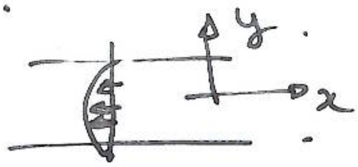
Plan du cours.

I]. Outils mathématiques : ppmax et régularité.

II). Un modèle d'ondes progressives multi-D : existence et stabilité.

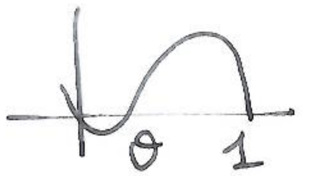
Présentation du modèle.

$\Sigma = \mathbb{R} \times [-L, L]$.



$V(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(y) \\ 0 \end{pmatrix}$. $\quad \operatorname{div} V = 0$.

$f(u) = u(u-\theta)(1-u)$; $0 < \theta < \frac{1}{2}$.



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \alpha(y) \dfrac{\partial u}{\partial x} = f(u). & (\Sigma). \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 & (\mathbb{R} \times \partial\omega). \end{cases}$$

$$u(t,-\infty,y) = 0 \; ; \quad u(t,+\infty,y) = 1.$$

Ondes progressives : $u(t,x,y) = \phi(x+ct, y)$.

$$\begin{cases} -\Delta\phi + (c+\alpha(y))\phi_x = f(\phi) \quad (\Sigma). \\ \phi_y(x, \pm L) = 0. \\ \phi(-\infty, y) = 0 \; ; \quad \phi(+\infty, y) = 1. \end{cases}$$

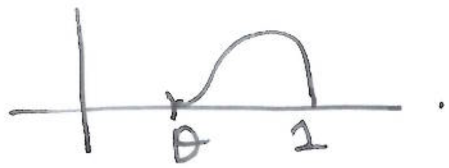
Nous allons montrer l'existence et l'unicité des ondes progressives, ainsi que leur stabilité globale.

NB. Pas a priori évident qu'un tel modèle puisse supporter une onde progressive.

III). Un modèle totalement inhomogène : fronts de transition.

Présentation du modèle :

Dimension 1 d'espace ; $V(x) = 0$, $f(x,u) = a(x) f($



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(x) f(u) . \\ u(t,-\infty) = 0 ; \quad u(t,+\infty) = 1 . \end{cases}$$

Bien entendu la notion d'onde progressive n'est pas pertinente. On ne peut pas injecter $\phi(x+ct)$ dans le modèle. Nous examinerons par quoi remplacer cette notion.

IV]. Ondes progressives multi-D de type KPP.

(s'il reste du temps !).

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(x,u) = f(u) = u(1-u) .$$

En 1D l'équation devient $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(1-u)$

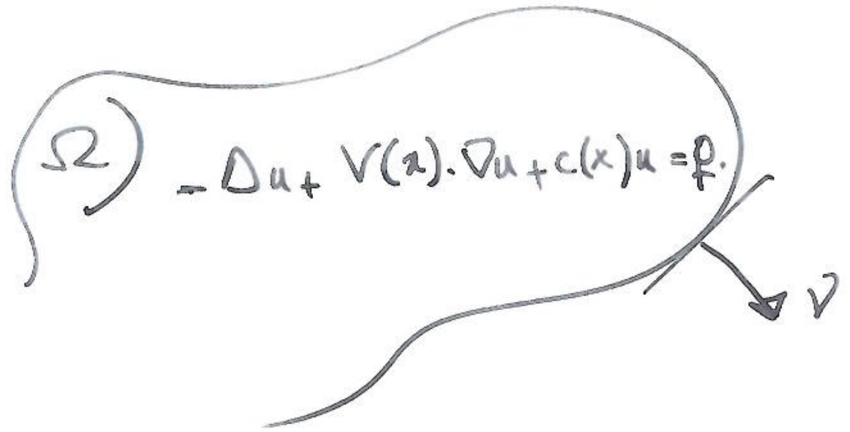
et le 1er papier mathématique sérieux est celui de Kolmogorov, Petrovskii, Piskunov.

⚠ L'ensemble des vitesses possibles est un intervalle.

Nous verrons comment généraliser ces résultats. Là encore, pas évident qu'il y ait des ondes !

I). Outils mathématiques.

1°). Principe du maximum elliptique.



Prop. (principe du max faible). On suppose :

$c(x) \geq 0$, $\begin{pmatrix} u(x) \geq 0 \\ \text{ou } u_\nu(x) = 0 \end{pmatrix}$ sur $\partial\Omega$, $\liminf\limits_{\substack{|x| \to +\infty \\ x \in \Omega}} u(x) \geq 0$.

(si Ω infini).

Alors $u(x) \geq 0$ dans Ω.

Th. (principe du max fort). On suppose :
$u \geq 0$ dans Ω et $u \not\equiv 0$. Alors :

[i]. $u(x) > 0$ si $x \in \Omega$.

[ii]. Si $x \in \partial\Omega$ et $u(x) = 0$, alors

$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) < 0$. $\quad \nu(x)$.

(Lemme de Hopf)

Remarque : pas d'hypothèse sur les ~~coeff. de c~~ signe de c.

Ça n'a l'air de rien, mais on peut faire beaucoup de choses avec ça. Exemple : soit $\phi(x,y)$ une onde progressive multi-dimensionnelle bistable.

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u + \beta(y) u_x = f(u). \quad (\Sigma). \\ \qquad u_y(\pm L) = 0 \quad (\mathbb{R}). \\ u(-\infty, y) = 0, \quad u(+\infty, y) = 1. \end{array}\right. \qquad (*)$$

<u>Th.</u> (Berestycki - Nirenberg, 1990). Nous avons :

[i] $0 < \phi < 1$.

[ii] $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} > 0$ dans Σ.

[iii]. Il y a au plus un c tel que $(*)$ a une solution (non trivial, la connexion entre 0 et 1).

[iv]. Si c est tel que $(*)$ a une sol, cette sol. est unique aux transl. près.

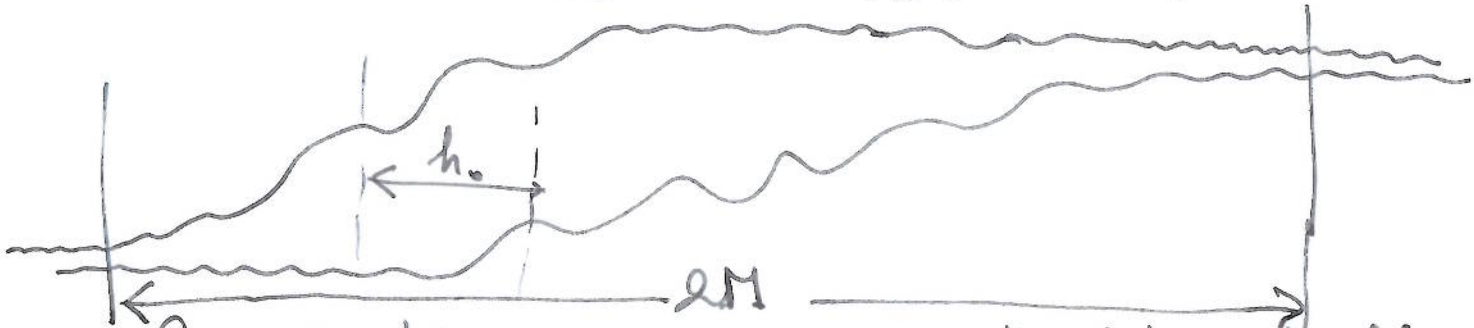
<u>Preuve</u>. [i]. En exercice, examiner un max ou un min de u.

[ii]. On remarque que $(*)$ est invariante par translation ; $1^{\text{ère}}$ idée : regarder ϕ_x.

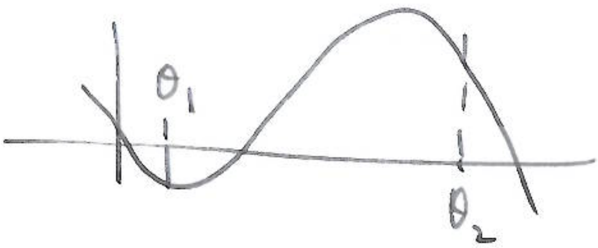
$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta \phi_x + \beta(y) \partial_x \phi_x = f'(\phi)\phi_x = 0. \\ \qquad \text{"} \phi_x(\pm\infty) = 0 \text{"}. \end{array}\right.$$

Problème : $f'(\phi)$ n'a pas de signe constant.
Par contre $-f'(\phi) > 0$ au vois. de $x = \pm\infty$.
Deuxième idée : regarder des incréments
de ϕ de la forme : $\phi(x+h, y) - \phi(x, y)$.

Etape 1. Il existe $h_0 > 0$ tel que
$$\phi(x+h_0, y) - \phi(x, y) > 0 \text{ dans } \Sigma.$$



Ça va bien se passer sur tt intervalle fini, mais il faut contrôler l'infini.



$\theta_1 < \theta$: $f'(u) < 0$ si $u \leq \theta_1$
$\theta_2 > \theta$: $f'(u) < 0$ si $u \geq \theta_2$.

M tel que : $x \leq -M \Rightarrow \phi(x, y) \leq \theta_1$
$x \geq M \Rightarrow \phi(x, y) \geq \theta_2$.

Soit $h_0 > 0$ tel que
$$\phi(x+h_0, y) \geq \phi(x, y) \text{ si } -M \leq x \leq M.$$

$\Omega_- = \{ (x, y) : x \leq -M ; \cancel{\phi(x, y)}\ \phi(x+h_0, y) \leq \theta_1 \}$.

$$(-\infty, -M) \times (-L, L) = \Omega_- \cup \underbrace{\{x \leq -M,\ \phi(x,y) \geq \theta_1\}}_{\text{peut-être vide.}}$$

$\phi(x+h_0, y) \geq \phi(x,y)$

Dans Ω_- : $\psi(x,y) = \phi(x+h_0, y) - \phi(x,y)$.

$$\begin{cases} -\Delta\psi + \beta(y)\psi_x - f'(q_{x,y})\psi = 0. \\ \psi(-M,y) > 0 \quad \text{sur } \Omega_- \cap \{-M\} \times [-L, L). \\ \psi_y = 0 \quad \text{sur } \Omega_- \cap (-\infty, -M) \times \{-L, L\} \end{cases}$$

Donc $\psi \geq 0$.

<u>Conclusion</u> : $\phi(x+h_0, y) - \phi(x,y) \geq 0$. Idem si $h \geq h_0$.

<u>Etape 2</u>.

$$h_* = \inf\{h > 0 : \forall k \geq h,\ \phi(x+k, y) \geq \phi(x,y)\}$$

(on translate vers la droite).

- $h_* = 0$: bingo.
- $h_* > 0$: cherchons à montrer une contradiction.

Sur $[-M, M] \times [-L, L]$ on a

$$\phi(x+h_0, y) - \phi(x,y) \geq q_M > 0$$

par le principe du max fort. En effet, sur $[-M-1, M+1] \times [-L, L]$:

$$-\Delta\psi + \beta(y)\psi_x - f'(\cdot)\psi = 0.$$

$\psi \geq 0$; si $\psi(x_0, y_0) = 0$:

- on ne peut pas avoir $(x_0, y_0) \in (-M-1, M+1) \times (-L$
- si $y_0 = \pm L$ alors $x_0 \notin [-M, M]$. Sinon, $\psi_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Donc $\psi > 0$ sur $[-M, M] \times [-L, L]$. Et donc il existe δ_0 tel que

$$\phi(x + h_* - \delta, y) - \phi(x, y) \geq 0 \quad \text{si } \delta \in [0, \delta_0].$$

- Par le même argument que plus haut : $\psi \geq 0$ partout.

Contrad. avec la minimalité de h_*. ∎

[iv]. Le même argument montre l'unicité de c. Soient $c_2 \leq c_1$ deux vitesses possibles. ϕ_1, ϕ_2 : deux solutions.

$$-\Delta(\phi_2 - \phi_1) + (c_1 + \alpha(y)) \frac{\partial}{\partial x}(\phi_2 - \phi_1) - f'(\cdot)(\phi_2 - \phi_1)$$

$$= (c_1 - c_2) \partial_x \phi_2 \geq 0.$$

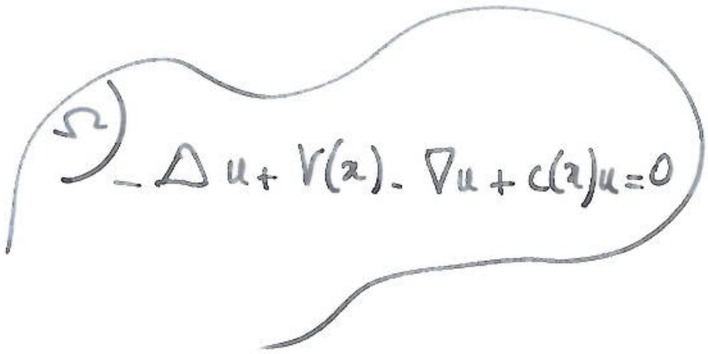
- Il existe h_0 tel que $\phi_2(x + h_0, y) \geq \phi_1(x, y)$.
- $h_* = \inf \{ h : \forall k \geq h, \phi_2(x + k, y) \geq \phi_1(x, y) \}$.

$\phi_2(x + h_*) = \phi_1(x, y)$. ∎

2°). Régularité elliptique.

Enorme industrie sur laquelle je ne m'étendrai pas. Je vais énoncer une version du pauvre adaptée à nos besoins.

V et c bornés.



$$-\Delta u + V(x)\cdot\nabla u + c(x)u = 0$$

Th. Supposons : $0 \in \Omega$; $B_1(0) \subset \Omega$; $|u| \leq M$ dans $B_1(0)$. Il existe $\lambda > 0$, indépendant de u, tel que

$$|\nabla^2 u| \leq \lambda M$$

dans $B_{1/2}(0)$.

Supposons que $|B_1(0) \cap \Omega| \geq \frac{1}{2}$, $\partial\Omega \cap B_1(0) \neq \emptyset$; $u_\nu = 0$ sur $\partial\Omega \cap B_1(0)$. Le même résultat est valable.

On peut bien évidemment montrer beaucoup plus, mais ça nous suffira réellement.

Conséquence : Harnack elliptique.

Th. Supposons $B_1(0) \subset \Omega$, $u \geq 0$ dans $B_1(0)$. Il existe $\lambda > 0$ tel que

|| $$\inf_{B_{1/4}(0)} u \geqslant \lambda \sup_{B_{1/2}(0)} u .$$

On se rappelle que $\inf_{B_{\frac{1}{4}}(0)} u > 0$, grâce au ppmax fort.

On a ce qu'il nous faut avec l'elliptique ; on se tourne maintenant vers le parabolique.

3°). <u>Principe du maximum parabolique.</u>

Ω)

$$u_t - \Delta u + V(t,x).\nabla u + c(t,x)u = 0 .$$
$$(t>0,\ x \in \Omega .)$$

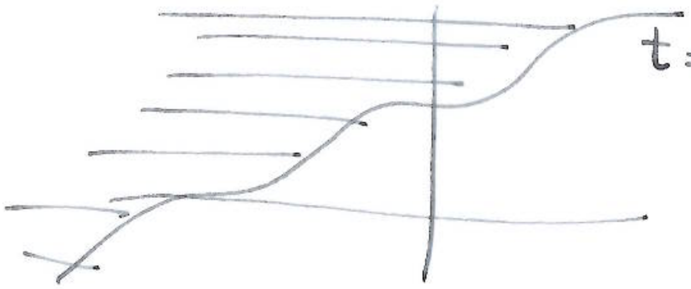
<u>Th.</u> (ppmax faible). On suppose : $u(0,x) \geqslant 0$,
|| $u(t,x) \geqslant 0$ si $x \in \partial\Omega$. Alors $u(t,x) \geqslant 0$.

<u>Remarque</u> : Pas d'hypothèse sur le signe de c.

<u>Th.</u> (ppmax fort). Supposons que u vérifie
|| la même équation, sur $[t_1,t_2] \times \Omega$ ~~ou même sur un ensemble du type~~ : Si $u \geqslant 0$ et $u \not\equiv 0$, alors $u > 0$ sur $(t_1,t_2) \times \Omega$.

Si de plus (t_0, x_0) est tel que $x_0 \in \partial\Omega$, $u(t_0, x_0) = 0$ $(t_1 < t_0 < t_2)$ on a $\partial_\nu u(t_0, x_0) < 0$.

<u>Remarque</u> : résultat valable sur un domaine de la forme $t_1 < t < t_2$; $x \leq T(x)$.



$t = T(x)$.

<u>Conséquence</u>.
$$\begin{cases} u_t - \Delta u + V(x) \cdot \nabla u = f(x, u). \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$
+ conditions aux limites.

$$u_{10} \leq u_{20} \implies u_1 \leq u_2.$$

4°). <u>Régularité parabolique</u>.

Voici l'esprit des théorèmes de régularité parabolique.

<u>Th</u>. $u_t - \Delta u + V(t, x) \cdot \nabla u + c(t, x) u = 0$.

$-1 \leq t \leq 1$.

$x \in B_1(0)$.

$|u| \leq M$ dans ce domaine. Alors $\exists \lambda > 0$:

$$\sup_{\substack{0 \leq s, t \leq 1 \\ x \in B_{1/2}(0)}} \frac{u(t, x) - u(s, x)}{(t-s)^{1/2}} + \sup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ x \in B_{1/2}(0)}} |\nabla u(t, x)| \leq \lambda M.$$

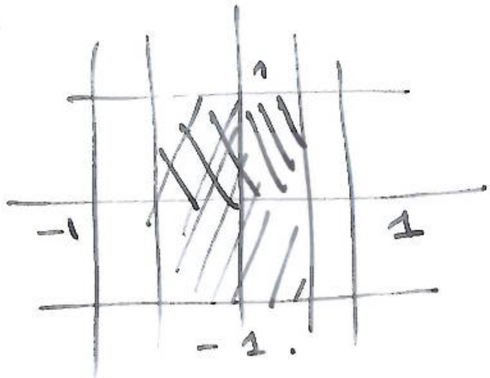
Là encore, on peut prouver bien plus ! Mais ça nous suffira amplement.

A quoi ça sert ?

Conséquence 1. Harnack parabolique.

$u>0$ sur $[-1,1]\times B_1(0)$. Alors :

$$\inf_{\substack{0\le t\le 1 \\ x\in B_{1/2}(0)}} u \geq 1 \sup_{\substack{-1\le t\le 1 \\ x\in B_{1/2}(0)}} u .$$



Conséquence 2. Comportement en temps grand.

Modèle thermo-diffusif multi-D.

$x \longrightarrow x+ct$.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + (c+\alpha(y))\, u_x = f(u). \quad (\Sigma). \\ u_y(t,x,\pm l) = 0 . \end{cases} \qquad (*)$$

Supposons : $\exists\, x_1 < x_2$ tel que

$$\phi(x+x_1,y) \leq u(0,x,y) \leq \phi(x+x_2,y).$$

Alors • $\phi(x+x_1,y) \leq u(t,x,y) \leq \phi(x+x_2,y)$.

• En particulier, $u\in[0,1]$. Donc la suite $(u(t,\cdot,\cdot))_{t>0}$ est relativement compacte dans $C([-M,M])$ pour tout M (Ascoli).

II). Ondes progressives multi-dimensionnelles bi-stables-

$$\left\{\begin{array}{l} u_t - \Delta u + \alpha(y)\, u_x = f(u). \quad (\Sigma). \\ \qquad u_y(x, \pm L) = 0 \qquad\qquad (1) \\ u(t,-\infty,y) = 0; \quad u(t,+\infty,y) = 1. \end{array}\right.$$

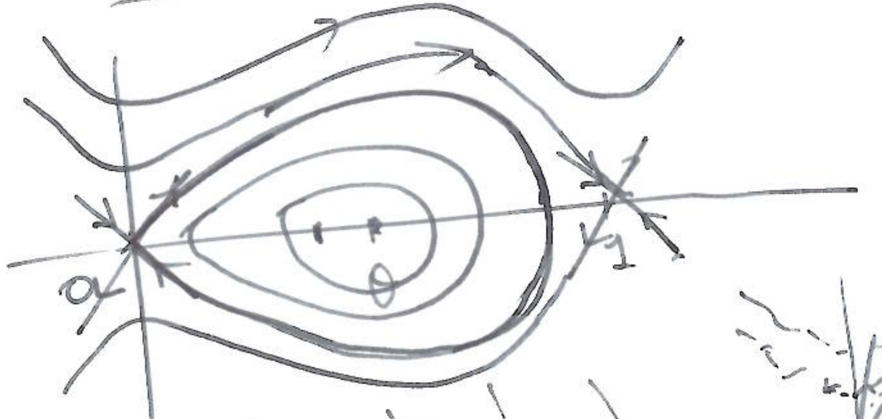
Existence et stabilité globale d'ondes progressives: $\phi(x+ct, y)$.

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta\phi + (c+\alpha(y))\,\phi_x = f(\phi). \quad (\Sigma) \qquad (2) \\ \qquad \phi_y(x, \pm L) = 0. \\ \phi(-\infty, y) = 0; \quad \phi(+\infty, y) = 1. \end{array}\right.$$

Dimension 1 d'espace:

$$\left\{\begin{array}{l} -\phi'' + c\phi' = f(\phi). \\ \phi(-\infty) = 0; \quad \phi(+\infty) = 1. \end{array}\right.$$

Portrait de phases $c = 0$.



Donc ces 2 orbites sont faites pour se rencontrer !

D'après Fife-McLeod, ces ondes sont global^t stables / au pb d'évolution :

$$u_t - u_{xx} = f(u) .$$

<u>Th.</u> $\lim_{x \to -\infty} u(0,x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} u(0,x) = 1$.

|| Il existe x_0 : $|u(t,x) - \phi(x+ct+x_0)| \leq Ce^{-\omega t}$.

Nous allons voir que ce th. se transmet à l'équation.

<u>Th. 1.</u> (Berestycki-Nirenberg, 92). $\exists ! c$ tel

|| que (2) a une solution.

Voir les propriétés qualitatives de ϕ.

<u>Th. 2.</u> (R, 94). $\lim_{x \to -\infty} u(0,x,y) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} u(0,x,y)$

|| $= 1$. Il existe x_0 :

$$|u(t,x,y) - \phi(x+ct+x_0, y)| \leq Ce^{-\omega t}.$$

1°). <u>Ensemble ω-limite.</u>

<u>Admettons le Th. 1.</u>

- $x \longrightarrow x+ct$.
- u_0 : donnée initiale pour (1). Supposons dans un 1er temps : $\exists x_1 < x_2$

tel que $\phi(x+x_1, y) \leq u_0(x,y) \leq \phi(x+x_2, y)$.

Ppmax $\Rightarrow$ $\phi(x+x_1, y) \leq u(t,x,y) \leq \phi(x+x_2,y)$.

$$\omega(u_0) = \Big\{ \psi \in C(\bar\Sigma) : \exists (t_n)_n \to +\infty, \lim_{n\to+\infty} u(t_n,x,y) = \psi(x,y) \text{ unif}^{t} \Big\}.$$

Par régularité parabolique + Ascoli + le fait que u soit encadrée par 2 translatées de ϕ : $\omega(u_0)$ est non vide et compact dans $C(\bar\Sigma)$. De plus :

$\omega(u_0)$ est invariant par l'évolution de (1), pour les $t>0$ et les $t<0$.

Le résultat principal est la

~~prop. Il existe $x_0 \in [x_1, x_2]$: $\phi(\cdot+x_0, \cdot) \in \omega(u_0)$.~~

~~Déf. $u(x,y) \in C(\bar\Sigma)$; $T_h u(x,y) = u(x+h,y)$.~~

prop. $\omega(u_0)$ est constitué d'ondes progressives.

Ce résultat découle de la proposition générale suivante.

prop. $u(t,x,y)$: – définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.
– coincée entre $T_{x_1}\phi$ et $T_{x_2}\phi$.

Alors il existe $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que :
$u(t,x,y) = \phi(x+x_0, y)$.

<u>Preuve</u>. Un peu comme Berestycki-Nirenberg, mais en dynamique. Soit $h \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$; considérons :

~~$v_{h,k}(t+h, x+k, y) - v(t$~~

$$v_{h,k}(t,x,y) = u(t+h, x+k, y) - u(t,x,y).$$

Nous cherchons à montrer : $\forall h \in \mathbb{R}$, $\forall k \geq 0$:
$v_{h,k}(x,y) \geq 0$. Ceci implique : $\forall h \in \mathbb{R}$,
$u(t+h, x, y) = u(t,x,y)$ soit $\partial_t u = 0$.
Par Berestycki-Nirenberg, u = une translatée de ϕ.

Puisque $T_{x_1}\phi \leq u \leq T_{x_2}\phi$, nous avons :

$$\cancel{u(t} \quad v_{h,k}(t,x,y) \geq 0 \text{ si } k \geq k_0 = x_2 - x_1.$$

Soit $k_0 = \inf\{\bar{k} : \forall \bar{k} \geq k,\ v_{h,\bar{k}} \geq 0\}$.

Si $k_0 = 0$, bingo. Sinon, considérons $M > 0$ tel que :

$$\forall x \leq -M, \ \forall k \leq k_0 \quad \begin{matrix} u(t+h, x+k, y) \\ u(t,x,y) \end{matrix} \leq \theta_1.$$

$$\forall x \geq M, \quad \begin{matrix} u(t+h, x+k, y) \\ u(t,x,y) \end{matrix} \geq \theta_2.$$

La remarque pertinente est que : il existe $\gamma > 0$ tel que : $\forall (t, x, y) \in \overline{\Sigma}$,

$$v_{h,k}(t,x,y) \geq \gamma .$$

Sinon : il existe une suite $(t_n)_n$ telle que

$$\sup_{\overline{\Sigma}} v_{h,k}(t_n, x, y) \to 0 .$$

Quitte à extraire une sous-suite, la suite $(u(t_n + t, x, y))_n$ cv unif^t sur $\overline{\Sigma}$ vers $u_\infty(t,x,y)$ et nous avons :

$$u_\infty(t+h, x+k_0, y) = u_\infty(t,x,y) .$$

$$\phi(x+x_1, y) \leq u_\infty(t,x,y) \leq \phi(x+x_2, y) .$$

Impossible ! Donc on a bien le γ.

Harnack parabolique donne :

$$v_{h,k_0}(t,x,y) \geq q_M \gamma$$

sur $t \times [-M,M] \times [-L,L]$.

Et donc, par le THA,F, il existe δ_0 tel que :

$\forall \delta \leq \delta_0$, $v_{h,k_0-\delta} \geq \dfrac{q_M \gamma}{2}$

sur $\mathbb{R} \times [-M,M] \times [-L,L]$

Soit alors $t_0 \in \mathbb{R}$, et $t \leq t_0$.

Sur $\Sigma \setminus [-M,M] \times [-L,L]$, $v_{h,k}$ satisfait :

$$\left[\partial_t - \Delta + \beta \partial_x - f'(\theta_{h,k})\right] v_{h,k} = 0 .$$

On : $\theta_{h,k} \in [0, \theta_1]$ ou $[\theta_2, 1]$.

Et donc $\exists \lambda > 0$ tel que $f'(\theta_{h,k}) \leq -\lambda$.

On part de $t = t_0 - n$. La fonction

$$\underline{v}(t) = -A_0 e^{-\lambda(t-(t_0-n))}$$

vérifie

- $(\partial_t - \Delta + \beta \partial_x - f'(\theta_h)) \underline{v} \leq 0$.
- $\underline{v}(t_0 - n) \leq v_{h,k}(t_0 - n, \cdot)$ sur $\widetilde{\Sigma}_M$.
- $\underline{v}(t) \leq v_{h,k}(t, \cdot)$ si $x = \pm M$, $t \geq t_0 - n$.

<u>Conclusion</u> : $\underline{v}(t_0) \leq v_{h,k}(t_0, x, y)$ sur $\widetilde{\Sigma}_M$.

$$\underline{v}(t_0) = -A_0 e^{-\lambda n}.$$

Et donc $v_{h,k}(t_0, x, y) \geq 0$ sur $\widetilde{\Sigma}_M$. $\boxtimes$

Reste à montrer la convergence vers une seule onde. Pour ce faire on utilise un résultat très classique de stabilité.

<u>Prop.</u> $X = C_0(\overline{\Sigma})$.

$L = -\Delta + \beta(y)\partial_x - f'(\phi)$.

[i]. $N(L) = N(L^2) = \langle \partial_x \phi \rangle$.

[ii]. $\sigma(L) =$ 

[iii]. $X = N(L) \oplus R(L)$.

Ceci entraîne, très classiquement, l'existence de x_∞ tel que

$$|u(t,x,y) - \Phi_\infty(x+x_\infty, y)| \leq Ce^{-\omega t}.$$