

## TD 4 Difféomorphismes, suites de fonctions et intégrales

**Exercice 1.** Soit  $f : U \rightarrow V$  un difféomorphisme. Soit  $\gamma \subset U$  une courbe simple fermée. Montrer que l'image par  $f$  d'une composante connexe de  $U \setminus \gamma$  est une composante connexe de  $V \setminus f(\gamma)$ .

**Exercice 2.** Montrer que l'application  $f$  suivante est un difféomorphisme. Déterminer sa réciproque.

$$f : \mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$
$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

**Exercice 3.** Soit  $\mathcal{F} = \{f_\epsilon : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}_+ \text{ holomorphe} \mid f_\epsilon(0) = \epsilon, \epsilon > 0\}$ .

- Déduire de l'exercice précédent que la famille  $\mathcal{F}$  est normale, c'est-à-dire que de toute suite de  $\mathcal{F}$  on peut extraire une sous-suite uniformément convergente sur les compacts.
- Montrer que si  $f$  est un point d'accumulation de  $\mathcal{F}$  alors  $f'(0) = 0$ .

**Exercice 4.** On considère la transformation de Joukowski  $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ .

- Déterminer l'image du cercle unité.
- En déduire que  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  sur  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ .
- On considère la suite des polynômes de Tchebychev  $T_n$ . Ils vérifient  $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ . Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  on a  $T_n(f(z)) = f(z^n)$ .
- En déduire que la suite  $T_n(z)$  n'admet de sous suite convergente que pour  $z \in [-1, 1]$ .

**Exercice 5.** Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact vers  $f$ . Montrer que :

- Si les fonctions  $f_n$  ne s'annulent pas alors ou bien  $f$  est identiquement nulle, ou bien  $f$  ne s'annule pas.
- Si les fonctions  $f_n$  sont injectives alors ou bien  $f$  est constante, ou bien  $f$  est injective.

**Exercice 6.** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $f(z) = \int_0^{2\pi} \exp(\cos(zt)) dt$ . Montrer que  $f$  est holomorphe. Déterminer le rayon de convergence de son développement en série entière au voisinage de 0

**Exercice 7.** Soient  $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| < 1\}$  et  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$f_n(z) = \int_0^n \frac{e^{-x} \sin(zx)}{x} dx.$$

- Montrer que la fonction  $f_n$  est définie et holomorphe sur tout  $\mathbb{C}$  pour tout  $n \geq 0$ .
- Montrer que la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur les compacts de  $U$ .
- Montrer que pour  $|z| < 1$  on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} \sin(zx)}{x} dx = \sum_0^\infty (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{2p+1}.$$