

## TD 1 Fonctions analytiques

**Exercice 1.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{C}$  et  $f$  une fonction analytique sur  $\Omega$  qui ne s'annule pas. Montrer que  $g = 1/f$  est analytique sur  $\Omega$ .

**Exercice 2.** Soit  $f(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$  une série de rayon de convergence  $\rho$ . On suppose qu'il existe  $C > 0, R > 0$  et une suite strictement croissante  $(n_k)$  tels que

$$|b_{n_k}| > CR^{n_k} \quad \forall k \geq 0.$$

Montrer que  $\rho \leq 1/R$ .

**Exercice 3.** On se propose de montrer le théorème fondamental de l'algèbre : *Tout polynôme non constant a au moins une racine dans  $\mathbf{C}$ .*

Soit  $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_d z^d$  avec  $a_0 a_d \neq 0$ . On suppose que  $P$  n'a pas de racines dans  $\mathbf{C}$ .

On admettra que  $f = 1/P$  s'écrit  $f(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$  sur  $\mathbf{C}$ .

Soit  $C > 0$  tel que  $C < |b_0|$  et  $R > 0$  tel que (justifier l'existence d'un tel  $R$ )

$$\frac{|a_0|R^d + \dots + |a_{d-1}|R}{|a_d|} \leq 1.$$

1) Pour tout  $k \geq 0$ , montrer que si  $|b_i| \leq CR^i$  pour  $i \in [k+1, k+d]$  alors  $|b_k| \leq CR^k$ .

2) Conclure en appliquant l'exercice 2.

**Exercice 4.** On se propose de montrer le théorème suivant du mathématicien Harald Bohr, frère de Niels Bohr.

*Théorème : Soit  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence au moins 1. Si pour tout  $z$  dans  $D(0, 1)$  (le disque unité)  $|f(z)| < 1$  alors  $\sum_0^\infty |a_n z^n| < 1$  pour tout  $z$  dans  $D(0, 1/3)$ . De plus  $1/3$  est le rayon optimal. (Appelé rayon de Bohr).*

1) Montrer que l'on peut supposer que  $f(0) > 0$ .

2) Pour  $r \in ]0, 1[$ , montrer que  $\frac{1}{2i\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = a_n$  pour  $n \geq 0$  et vaut 0 pour  $n$  négatif.

3) En déduire que si  $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence au moins 1 et de partie réelle positive alors  $|b_n| \leq 2\Re(b_0)$  (inégalité de Carathéodory).

4) On suppose à présent que  $f(0) > 0$ . Soit  $g(z) = 1 - f(z)$ . En appliquant l'inégalité de Carathéodory, montrer que  $\sum_0^\infty |a_n z^n| < 1$  sur le disque  $D(0, 1/3)$ .

5) Soit  $f(z) = \frac{z-a}{1-az}$  avec  $a \in ]0, 1[$ . On admettra que  $f$  envoie le disque unité dans lui même. Montrer que  $\sum_0^\infty |a_n z^n| < 1 \iff |z| = \frac{1}{2a+1}$ . Conclure.

**Exercice 5.** Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathbf{C}$ , une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

(1). Montrer que, pour tout  $0 \leq r < R$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n}.$$

(2). En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2,$$

où  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ , et que pour tout  $n \geq 0$ , on a l'inégalité de Cauchy

$$|a_n| \leq M(r)r^{-n}.$$

(3). On suppose que  $R = \infty$  et qu'il existe un entier  $k \geq 0$  de des constantes  $c \geq 0$ ,  $r_0 \geq 0$  tels que  $M(r) \leq cr^k$  pour tout  $r \geq r_0$ . Montrer que  $f$  est un polynôme de degré  $\leq k$ .

**La transformation d'Abel:** Soient  $(u_n)$  une suite d'éléments de l'espace de Banach  $E$  et  $(v_n)$  une suite de scalaires. On pose  $S_k^m = v_k + \dots + v_m$ . Montrer que pour  $n \leq m$ , on a

$$\sum_{k=n}^m u_k v_k = \sum_{k=n+1}^m (u_k - u_{k-1}) S_k^m + u_n S_n^m.$$

**Exercice 6.** (Critères d'Abel) Soit  $a_n$  une suite de fonctions définies sur un même ensemble  $X$ , et soit  $b_n$  une suite de fonctions définies sur un même ensemble  $Y$ .

(1). On suppose que les sommes partielles de la série  $\sum a_n$  sont uniformément bornées sur  $X$ , que  $b_n(y)$  tend vers 0 uniformément sur  $Y$ , et que la série  $\sum (b_{n+1} - b_n)$  est uniformément et absolument convergente sur  $Y$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum a_n(x)b_n(y)$  converge uniformément sur  $X \times Y$ .

(2). On suppose que la série  $\sum a_n$  converge uniformément sur  $X$ , que la suite  $b_n$  est uniformément bornée sur  $Y$ , et qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\sum_{n=0}^{\infty} |b_{n+1}(y) - b_n(y)| \leq C$  pour tout  $y \in Y$ . Montrer que la série de fonctions  $\sum a_n(x)b_n(y)$  converge uniformément sur  $X \times Y$ .

**Exercice 7.** En utilisant un des critères d'Abel, montrer que la série entière  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  converge uniformément sur tout compact de  $\overline{D(0,1)} \setminus \{1\}$ . En déduire que pour tout  $\zeta \in S^1 \setminus \{1\}$ , on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} = -\text{Log}(1 - \zeta).$$

En utilisant ce résultat, pour tout  $x \in ]0, 2\pi[$ , établir les formules

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\log |2 \sin(\frac{x}{2})|, \quad \sum_1^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

**Exercice 8.** (Théorème d'Abel) Soit  $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ , une série entière telle que la série

$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge. Le rayon de convergence est donc  $\geq 1$ .

(1). En utilisant la transformation d'Abel, montrer que, pour tout  $c \geq 1$ , la série entière  $f$  converge uniformément sur

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |1 - z| \leq c(1 - |z|)\}.$$

(2). En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{z \rightarrow 1, z \in A, z \neq 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

(3). Montrer que, pour tout  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ , la série entière  $f$  converge uniformément sur le secteur

$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : z = 1 - re^{i\theta}, |\theta| \leq \alpha, 0 \leq r \leq \cos \alpha\}.$$