

Licence de Mathématiques Fondamentales

ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE TD 1

Exercice 1. Soient $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^m$, on a $A^T y = \sum_{i=1}^m y_i a_i$.

Exercice 2. Parmi les propositions suivantes, indiquer celles qui sont vraies en les démontrant, et celles qui sont fausses par un contre-exemple.

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = I_n$ implique $BA = I_n$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si les vecteurs colonnes (resp. lignes) forment une base orthonormée dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.
- $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ implique que λ^2 est valeur propre de A^2 .
- $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B diagonale implique $AB = BA$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A$ est orthogonale si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.
- $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre d'ordre p de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si $\lambda + \mu$ est valeur propre d'ordre p de $A + \mu I_n$.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et soit $f \in \text{End}(E)$ de rang égal à 1.

- Quelles sont les valeurs propres de f ?
- Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\text{tr } f \neq 0$.
- Montrer que si $\text{tr } f \neq 0$, alors $f^p = (\text{tr } f)^{p-1} f$.

Exercice 4. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), D \in \mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{K}), A' \in \mathcal{M}_{p',r'}(\mathbb{K}), B' \in \mathcal{M}_{p',s'}(\mathbb{K}), C' \in \mathcal{M}_{q',r'}(\mathbb{K}), D' \in \mathcal{M}_{q',s'}(\mathbb{K})$, et les matrices par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$. Sous quelles conditions portant sur les dimensions des blocs peut-on effectuer les opérations $A + B$ et AB ? Écrire alors le résultat de ces opérations.

Exercice 5. Soit la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), 0 \in \mathcal{M}_{q,p}, C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. Calculer $\det M$ en fonction de $\det A$ et $\det C$.

Exercice 6. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A - B)\det(A + B)$.

Exercice 7. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Montrer que si A est inversible, alors $\det M = (\det A)(\det(D - CA^{-1}B))$.

Exercice 8. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\det A \neq 0$ et $AC = CA$. Montrer alors que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$.

Exercice 9. Montrer qu'une matrice unitaire a toutes ses valeurs propres de module 1.

Exercice 10. Soient $\mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles semi-définie positives et soit $\mathcal{M}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définie positives. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\det(I + C) \geq 1$ et $\det(I + C) \geq \det C$. En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\det(A + B) \geq \det A$ et $\det(A + B) \geq \det B$.

Exercice 11. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. En déduire qu'elles ont même déterminant et même trace.

Exercice 12. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique. Indication : examiner d'abord le cas où A est inversible. Dans le cas contraire, montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\det(A + \varepsilon I) \neq 0$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pour lesquelles il existe une famille v_1, \dots, v_n de vecteurs propres orthonormés. Montrer alors que $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k v_k^*$ où $v^* = \bar{v}^T$.

Exercice 14. Résoudre par bloc le système suivant $A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (15, 15, 25, 20, 9)^T$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant le fait que l'un des blocs de la matrice est facilement inversible. Calculer alors l'inverse de A .