

Examen d'analyse matricielle et modélisation (1L5MFDME2)

corrigé

I (3 points)

Question de cours : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, dans la méthode QR nous proposons la suite définie par récurrence : $A_1 = A$ et si $A_i = Q_i R_i$ (avec Q_i unitaire et R_i triangulaire supérieure de diagonale positive), on pose $A_{i+1} = R_i Q_i$. Montrer que si A est de Hessenberg, toutes les matrices A_i sont de Hessenberg et ont même spectre.

En effet, A étant inversible, il existe une unique factorisation QR comme indiqué. Puisque $Q_i^* A_i = R_i$; $A_{i+1} = Q_i^* A_i Q_i$ les matrices de la suite sont toutes deux-à-deux semblables, elles ont le même spectre. La suite est donc faite de matrices inversibles, et elle est uniquement définie. Montrons que la matrice Q_i est de Hessenberg, si A_i l'est. C'est le fait que R_i est triangulaire supérieure **inversible** qui fait l'affaire. En effet, notons q_{lk} les éléments de Q_i , a_{lk} ceux de A_i et \tilde{r}_{st} ceux de R_i^{-1} , matrice qui est **aussi triangulaire supérieure**. Ainsi, $q_{lk} = \sum_{t=1}^n a_{lt} \tilde{r}_{tk} = \sum_{t=1}^k q_{lt} \tilde{r}_{tk}$ parce que $\tilde{r}_{lt} = 0$ dès que $l > k$, puis $q_{lk} = \sum_{t=l-1}^k a_{lt} r_{tk}$ puisque A_i est de Hessenberg, $a_{lt} = 0$ si $l > t + 1$. Il est maintenant clair que si $l > k + 1$, $q_{lk} = 0$, c'est-à-dire que Q_i est de Hessenberg.

Enfin, le produit $R_i Q_i$ est aussi de Hessenberg, car $(A_{i+1})_{\ell k} = \sum_{t=1}^n r_{\ell t} q_{tk} = \sum_{t=\ell}^{k+1} r_{\ell t} q_{tk}$; si $\ell > k + 1$, $(A_{i+1})_{\ell k} = 0$, cette matrice est de Hessenberg.

II (3 points)

Pour résoudre par la méthode de Choleski le système linéaire :

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 3x + 34y - 8z = 16 \\ -x - 8y + 2z = -4 \end{cases} \quad \text{L'on applique l'algorithme de Cholesky à la matrice associée. Nous trouvons :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 34 & -8 \\ -1 & -8 & 2 \end{pmatrix} = LL^T. \text{ Le système } LY = (2, 16, -4)^T \text{ admet comme}$$

solution les vecteurs $(2, 2, k)^T$ pour k quelconque. Le système $L^T X = (2, 2, k)^T$ n'est compatible que si $k = 0$. Ses solutions sont les $(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}z, \frac{2}{5} + \frac{z}{5}, z)^T$. L'espace des solutions est la droite affine passant par $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0)^T$ de direction le vecteur $(2, 1, 5)^T$.

III (3 points)

Soit $X_1 = (3, 4)^T$. 1) Pour expliciter une matrice orthogonale H , telle que $HX_1 = (s, 0)^T$, il faut penser à la factorisation QR . On complète X_1 en une base, on l'orthonormalise. $Q_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})^T$ est le premier vecteur de la base orthonormale. Le deuxième, dans le plan, est $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, (ou son opposé). Ainsi

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Ou nous n'avons pas besoin de connaître a et b . Ainsi $H = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ vérifie $HX_1 = (5, 0)^T$.

2) En observant la matrice M on remarque qu'il y seulement la deuxième colonne à modifier pour qu'elle soit de Hessenberg; de plus on reconnaît le morceau de vecteur $(3, 4)^T$. Pour agir seulement sur les deux dernières lignes, on utilise un pavé identité, posons $O \in O_4(\mathbb{R})$

$$O = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix},$$

où H est la matrice obtenue en 1). Il est immédiat de calculer

$$\begin{aligned} OMO^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & \frac{29}{5} & \frac{59}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{382}{25} & \frac{61}{25} \\ 0 & 0 & \frac{61}{25} & \frac{27}{25} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le calcul de la somme des carrés des éléments de cette matrice peut faire peur, ainsi nous préférons calculer la somme des carrés des éléments de M . En effet $\|OMO^T\|_F^2 = Tr((OMO^T)^T OMO^T) = Tr(M^T M)$ qui est la somme des (modules) carrés de ses éléments. Ainsi $\|OMO^T\|_F^2 = 3*9 + 3*16 + 2*25 + 121 + 1 = 247$, $\|OMO^T\|_F = 15, 7162336$.

IV (8 points)

Pour A matrice réelle symétrique définie positive de taille n , avec $B, C \in M_n(\mathbb{R})$, C symétrique, notons $D = C - B^T A^{-1} B$, et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

i) Que D et M sont symétriques, est évident. Sachant $A^T = A, C^T = C, (A^{-1})^T = A^{-1}$ et $(B^T)^T = B$, on peut marquer :

$$M^T = \begin{pmatrix} A^T & (B^T)^T \\ B^T & C^T \end{pmatrix} = M, \text{ et } D^T = (C - B^T A^{-1} B)^T = C^T - B^T (A^{-1})^T B = D.$$

ii) Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$ arbitraires. Clairement $(X^T, Y^T)M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (X, Y) \begin{pmatrix} AX + BY \\ B^T X + CY \end{pmatrix}$ qui est $X^T AX + X^T BY + Y^T B^T X + Y^T CY$.

iii) Pour tout $Z \in \mathbb{R}^n$, $Z^T D Z = Z^T (C - B^T A^{-1} B) Z = (Z^T C - Z^T B^T A^{-1} B) Z = Z^T C Z - Z^T B^T A^{-1} B Z = Z^T C Z - (B Z)^T A^{-1} B Z = Z^T C Z - (B Z)^T [(A^{-1})^T A^T] A^{-1} B Z$, ainsi $Z^T D Z = Z^T C Z - (A^{-1} B Z)^T A^T A^{-1} B Z$.

Il s'en suit que $Z^T D Z + (A^{-1} B Z)^T A (A^{-1} B Z) = Z^T C Z$.

iv) Donnée Z arbitraire, le vecteur $\begin{pmatrix} -A^{-1} B Z \\ Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, vérifie (puisque M est semi-définie positive)

$$(-(A^{-1} B Z)^T, Z^T) M \begin{pmatrix} -A^{-1} B Z \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1} B Z \\ Z \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} -A^{-1} B Z \\ Z \end{pmatrix} \geq 0.$$

En remplaçant dans l'expression trouvée en ii) nous trouvons : $0 \leq (A^{-1} B Z)^T A A^{-1} B Z - (A^{-1} B Z)^T B Z - Z^T B^T A^{-1} B Z + Z^T C Z = Z^T D Z$. (D'après iii)) ainsi $0 \leq Z^T D Z$ pour tout Z . Ce qui permet de déduire du fait que M est symétrique semi-définie positive, le fait que D est semi-définie positive.

v) Calculons pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$ arbitraires, $\|A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} B Y\|^2 + Y^T D Y = (A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} B Y)^T (A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} B Y) + Y^T D Y = (X^T A^{\frac{1}{2}} + Y^T B^T A^{-\frac{1}{2}}) (A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} B Y) + Y^T D Y = X^T A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} X + X^T A^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} B Y + Y^T B^T A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} X + Y^T B^T A^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} B Y + Y^T D Y$ qui est égal à

$X^T A X + X^T B Y + Y^T B^T X + Y^T B^T A^{-1} B Y + Y^T C Y - Y^T B^T A^{-1} B Y$. qui se simplifie à $(X^T, Y^T) M (X^T, Y^T)^T$ d'après l'expression trouvée en ii).

Ainsi si l'on sait que $Y^T D Y \geq 0$ pour tout vecteur Y , on a $\|A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} B Y\|^2 + Y^T D Y \geq 0$ pour tout couple X, Y , et l'on déduit $0 \leq (X^T, Y^T) M (X^T, Y^T)^T$, c'est-à-dire, que M est semi-définie positive, comme il fallait démontrer.

vi) Déduire que M est semi-définie positive si et seulement si D l'est, est bien le résultat de iv) et v).

2- i) La matrice A est diagonalisable en base orthogonale, ses valeurs propres sont toutes positives. Ainsi il existe une matrice U orthogonale, et des valeurs propres, que l'on répète d'après leur multiplicité : $\lambda_i > 0$ tels que $A = U D U^T$ pour D la matrice diagonale, avec les λ_i sur sa diagonale. Évidemment, $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{E}_{ii}$. Ainsi $A = U D U^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i U \mathbb{E}_{ii} U^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{P}_i$.

ii) Évidemment $\mathbb{P}_i^2 = U \mathbb{E}_{ii} U^T U \mathbb{E}_{ii} U^T = U \mathbb{E}_{ii}^2 U^T = U \mathbb{E}_{ii} U^T = \mathbb{P}_i$. De plus $I = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{ii}$, donc $I = U I U^T = \sum_{i=1}^n U \mathbb{E}_{ii} U^T = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_i$. Enfin, puisque \mathbb{E}_{ii} est symétrique semi-définie positive, il en va de même de $U \mathbb{E}_{ii} U^T = \mathbb{P}_i$.

iii) Calculons $A^2 = (\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{P}_i) (\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbb{P}_j) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j$.

Or $\mathbb{E}_{ii} \mathbb{E}_{jj} = 0$ ou \mathbb{E}_{ii} selon que $i \neq j$ ou $i = j$. Et $\mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = U \mathbb{E}_{ii} \mathbb{E}_{jj} U^T$ qui est donc nul si $i \neq j$ et égale à \mathbb{P}_i si $i = j$. Ainsi $\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda_i \mathbb{P}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \mathbb{P}_i$. Comme il fallait démontrer.

3- i) Puisque ϕ est linéaire, $\phi(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i)$; $\phi(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \phi(\mathbb{P}_i)$ et de plus $I = \phi(I) = \sum_{i=1}^n \phi(\mathbb{P}_i)$,

$$\begin{pmatrix} I & \phi(A) \\ \phi(A) & \phi(A^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \phi(\mathbb{P}_i) & \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \phi(\mathbb{P}_i) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \phi(\mathbb{P}_i) & \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) \\ \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) & \lambda_i^2 \phi(\mathbb{P}_i) \end{pmatrix}.$$

Or puisque $\phi(\mathbb{P}_i)$ est semi-définie positive, elle admet une racine carrée \mathbb{S}_i symétrique semi-définie positive, évidemment $\phi(\mathbb{P}_i) = \mathbb{S}_i \mathbb{S}_i = \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i$. Il suffit de calculer

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \phi(\mathbb{P}_i) & \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) \\ \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) & \lambda_i^2 \phi(\mathbb{P}_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i & \lambda_i \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i \\ \lambda_i \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i & \lambda_i^2 \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_i X \\ \mathbb{S}_i Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & \lambda_i I \\ \lambda_i I & \lambda_i^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{S}_i X \\ \mathbb{S}_i Y \end{pmatrix},$$

et sommer pour obtenir l'expression souhaitée.

ii) Or d'après la partie 1- de ce problème, la matrice $\begin{pmatrix} I & \lambda_i I \\ \lambda_i I & \lambda_i^2 I \end{pmatrix}$ est semi-définie positive, si et seulement si la matrice $D = \lambda_i^2 I - \lambda_i I^T I^{-1} \lambda_i I$ (son complément de Schur) est semi-définie positive. Or cette dernière matrice est évidemment nulle, semi-définie positive donc. Ainsi, chaque terme de la somme est positif ou nul,

Si $L = \begin{pmatrix} I & \phi(A) \\ \phi(A) & \phi(A^2) \end{pmatrix}$ pour chaque couple (X, Y) de vecteurs, $0 \leq (X^T, Y^T) L (X^T, Y^T)^T$, La matrice L est semi-définie positive comme il fallait démontrer.

iii) L'on peut conclure que des telles applications ϕ vérifient que $\begin{pmatrix} I & \phi(A) \\ \phi(A) & \phi(A^2) \end{pmatrix}$ est toujours une matrice semi-définie positive, si A est définie positive. Son complément de Schur $D = \phi(A^2) - \phi(A)^T \phi(A) = \phi(A^2) - (\phi(A))^2$, est une matrice semi-définie positive, d'après 1-vi). En général, $\phi(A^2) - (\phi(A))^2$ n'est pas définie positive, comme l'exemple de A scalaire le montre. Un exemple d'application ϕ est le choix d'une sous-matrice principale, $A \mapsto A_p$, $1 \leq p \leq n$. Démontrer directement que $(A^2)_p - (A_p)^2$ est semi-définie positive n'est pas aisé.