UNIVERSITE PAUL SABATIER Décembre 2009

Licence de Mathématiques Fondamentales, L3

**Examen d'analyse matricielle et modélisation** (1L5MFDME2)

corrigé

## I (3 points)

**Question de cours** : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, dans la méthode QR nous proposons la suite définie par récurrence : $A_1 = A$ et si $A_i = Q_iR_i$ (avec $Q_i$ unitaire et $R_i$ triangulaire supérieure de diagonale positive), on pose $A_{i+1} = R_iQ_i$. Montrer que si $A$ est de Hessemberg, toutes les matrices $A_i$ sont de Hessemberg et ont même spectre.

En effet, $A$ étant inversible, il existe une unique factorisation $QR$ comme indiqué. Puisque $Q_i^*A_i = R_i;\ A_{i+1} = Q_i^*A_iQ_i$ les matrices de la suite sont toutes deux-à-deux semblables, elles ont le même spectre. La suite est donc faite de matrices inversibles, et elle est uniquement définie. Montrons que la matrice $Q_i$ est de Hessemberg, si $A_i$ l'est. C'est le fait que $R_i$ est triangulaire supérieure **inversible** qui fait l'affaire. En effet, notons $q_{lk}$ les éléments de $Q_i$, $a_{lk}$ ceux de $A_i$ et $\tilde{r}_{st}$ ceux de $R_i^{-1}$, matrice qui est **aussi triangulaire supérieure.** Ainsi, $q_{lk} = \sum_{t=1}^n a_{lt}\tilde{r}_{tk} = \sum_{t=1}^k q_{lt}\tilde{r}_{tk}$ parce que $\tilde{r}_{lt} = 0$ dès que $l > k$, puis $q_{lk} = \sum_{t=l-1}^k a_{lt}r_{tk}$ puisque $A_i$ est de Hessemberg, $a_{lt} = 0$ si $l > t+1$. Il est maintenant clair que si $l > k+1$, $q_{lk} = 0$, c'est-à-dire que $Q_i$ est de Hessemberg.

Enfin, le produit $R_iQ_i$ est aussi de Hessemberg, car $(A_{i+1})_{\ell k} = \sum_{t=1}^n r_{\ell t}q_{tk} = \sum_{t=\ell}^{k+1} r_{\ell t}q_{tk}$; si $\ell > k+1, (A_{i+1})_{\ell k} = 0$, cette matrice est de Hessemberg.

## II (3 points)

Pour résoudre par la méthode de Choleski le système linéaire :
$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 3x + 34y - 8z = 16 \\ -x - 8y + 2z = -4 \end{cases}$$
L'on applique l'algorithme de Cholesky à la matrice associée. Nous trouvons :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 34 & -8 \\ -1 & -8 & 2 \end{pmatrix} = LL^T$. Le système $LY = (2,16,-4)^T$ admet comme solution les vecteurs $(2,2,k)^T$ pour $k$ quelconque. Le système $L^TX = (2,2,k)^T$ n'est compatible que si $k = 0$. Ses solutions sont les $(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}z, \frac{2}{5} + \frac{z}{5}, z)^T$. L'espace des solutions est la droite affine passant par $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0)^T$ de direction le vecteur $(2,1,5)^T$.

## III (3 points)

Soit $X_1 = (3,4)^T$. 1) Pour expliciter une matrice orthogonale $H$, telle que $HX_1 = (s,0)^T$, il faut penser à la factorisation $QR$. On complète $X_1$ en une base, on l'orthonormalise. $Q_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})^T$ est le premier vecteur de la base orthonormale. Le deuxième, dans le plan, est $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, (ou son opposé). Ainsi
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$
Ou nous n'avons pas besoin de connaître $a$ et $b$. Ainsi $H = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 3/5 \end{pmatrix}$ vérifie $HX_1 = (5,0)^T$.

2) En observant la matrice $M$ on remarque qu'il y seulement la deuxième colonne à modifier pour qu'elle soit de Hessemberg ; de plus on reconnaît le morceau de vecteur $(3,4)^T$. Pour agir seulement sur les deux dernières lignes, on utilise un pavé identité, posons $O \in O_4(\mathbb{R})$
$$O = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix},$$
où $H$ est la matrice obtenue en 1). Il est immédiat de calculer
$$OMO^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & \frac{29}{5} & \frac{59}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{382}{25} & \frac{61}{25} \\ 0 & 0 & \frac{61}{25} & \frac{27}{25} \end{pmatrix}$$
Le calcul de la somme des carrés des éléments de cette matrice peut faire peur, ainsi nous préferons calculer la somme des carrés des éléments de $M$. En effet $||OMO^T||_F^2 = Tr((OMO^T)^TOMO^T) = Tr(M^TM)$ qui est la somme des (modules) carrés de ses éléments. Ainsi $||OMO^T||_F^2 = 3*9+3*16+2*25+121+1 = 247$, $||OMO^T||_F = 15,7162336$.

## IV (8 points)

Pour $A$ matrice réelle symétrique définie positive de taille $n$, avec $B, C \in M_n(\mathbb{R})$, $C$ symétrique, notons $D = C - B^TA^{-1}B$, et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

i) Que $D$ et $M$ sont symétriques, est évident. Sachant $A^T = A, C^T = C, (A^{-1})^T = A^{-1}$ et $(B^T)^T = B$, on peut marquer :

$M^T = \begin{pmatrix} A^T & (B^T)^T \\ B^T & C^T \end{pmatrix} = M$, et $D^T = (C - B^T A^{-1} B)^T = C^T - B^T (A^{-1})^T B = D$.

ii) Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$ arbitraires. Clairement $(X^T, Y^T) M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (X, Y) \begin{pmatrix} AX + BY \\ B^T X + CY \end{pmatrix}$ qui est $X^T AX + X^T BY + Y^T B^T X + Y^T CY$.

iii) Pour tout $Z \in \mathbb{R}^n$, $Z^T DZ = Z^T (C - B^T A^{-1} B) Z = (Z^T C - Z^T B^T A^{-1} B) Z = Z^T CZ - Z^T B^T A^{-1} BZ = Z^T CZ - (BZ)^T A^{-1} BZ = Z^T CZ - (BZ)^T [(A^{-1})^T A^T] A^{-1} BZ$, ainsi $Z^T DZ = Z^T CZ - (A^{-1} BZ)^T A^T A^{-1} BZ$.

Il s'en suit que $Z^T DZ + (A^{-1} BZ)^T A (A^{-1} BZ) = Z^T CZ$.

iv) Donné $Z$ arbitraire, le vecteur $\begin{pmatrix} -A^{-1} BZ \\ Z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, vérifie (puisque $M$ est semi-définie positive)

$$(-(A^{-1} BZ)^T, Z^T) M \begin{pmatrix} -A^{-1} BZ \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1} BZ \\ Z \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} -A^{-1} BZ \\ Z \end{pmatrix} \geq 0.$$

En remplaçant dans l'expression trouvée en ii) nous trouvons : $0 \leq (A^{-1}BZ)^T AA^{-1} BZ - (A^{-1}BZ)^T BZ - Z^T B^T A^{-1} BZ + Z^T CZ = Z^T DZ$. (D'après iii)) ainsi $0 \leq Z^T DZ$ pour tout $Z$. Ce qui permet de déduire du fait que $M$ est symétrique semi-définie positive, le fait que $D$ est semi-définie positive.

v) Calculons pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$ arbitraires, $||A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} BY||^2 + Y^T DY = (A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} BY)^T (A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} BY) + Y^T DY = (X^T A^{\frac{1}{2}} + Y^T B^T A^{-\frac{1}{2}})(A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} BY) + Y^T DY = X^T A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} X + X^T A^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} BY + Y^T B^T A^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} X + Y^T B^T A^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} BY + Y^T DY$ qui est égal à

$X^T AX + X^T BY + Y^T B^T X + Y^T B^T A^{-1} BY + Y^T CY - Y^T B^T A^{-1} BY$. qui se simplifie à $(X^T, Y^T) M (X^T, Y^T)^T$ d'après l'expression trouvée en ii).

Ainsi si l'on sait que $Y^T DY \geq 0$ pour tout vecteur $Y$, on a $||A^{\frac{1}{2}} X + A^{-\frac{1}{2}} BY||^2 + Y^T DY \geq 0$ pour tout couple $X, Y$, et l'on déduit $0 \leq (X^T, Y^T) M (X^T, Y^T)^T$, c'est-à-dire, que $M$ est semi-définie positive, comme il fallait démontrer.

vi) Déduire que $M$ est semi-définie positive si et seulement si $D$ l'est, est bien le résultat de iv) et v).

2- i) La matrice $A$ est diagonalisable en base orthogonale, ses valeurs propres sont toutes positives. Ainsi il existe une matrice $U$ orthogonale, et des valeurs propres, que l'on répéte d'après leur multiplicité : $\lambda_i > 0$ tels que $A = UDU^T$ pour $D$ la matrice diagonale, avec les $\lambda_i$ sur sa diagonale. Évidement, $D = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{E}_{ii}$. Ainsi $A = UDU^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i U \mathbb{E}_{ii} U^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{P}_i$.

ii) Évidement $\mathbb{P}_i^2 = U\mathbb{E}_{ii} U^T U \mathbb{E}_{ii} U^T = U \mathbb{E}_{ii}^2 U^T = U \mathbb{E}_{ii} U^T = \mathbb{P}_i$. De plus $I = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{ii}$, donc $I = UIU^T = \sum_{i=1}^n U \mathbb{E}_{ii} U^T = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_i$. Enfin, puisque $\mathbb{E}_{ii}$ est symétrique semi-définie positive, il en va de même de $U\mathbb{E}_{ii} U^T = \mathbb{P}_i$.

iii) Calculons $A^2 = (\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{P}_i)(\sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbb{P}_j) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j$.

Or $\mathbb{E}_{ii} \mathbb{E}_{jj} = 0$ ou $\mathbb{E}_{ii}$ selon que $i \neq j$ ou $i = j$. Et $\mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = U \mathbb{E}_{ii} \mathbb{E}_{jj} U^T$ qui est donc nul si $i \neq j$ et égale à $\mathbb{P}_i$ si $i = j$. Ainsi $\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \mathbb{P}_i \mathbb{P}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda_i \mathbb{P}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \mathbb{P}_i$. Comme il fallait démontrer.

3- i) Puisque $\phi$ est linéaire, $\phi(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i)$; $\phi(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \phi(\mathbb{P}_i)$ et de plus $I = \phi(I) = \sum_{i=1}^n \phi(\mathbb{P}_i)$,

$$\begin{pmatrix} I & \phi(A) \\ \phi(A) & \phi(A^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \phi(\mathbb{P}_i) & \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \phi(\mathbb{P}_i) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \phi(\mathbb{P}_i) & \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) \\ \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) & \lambda_i^2 \phi(\mathbb{P}_i) \end{pmatrix}.$$

Or puisque $\phi(\mathbb{P}_i)$ est semi-définie positive, elle admet une racine carrée $\mathbb{S}_i$ symétrique semi-définie positive, évidement $\phi(\mathbb{P}_i) = \mathbb{S}_i \mathbb{S}_i = \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i$. Il suffit de calculer

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \phi(\mathbb{P}_i) & \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) \\ \lambda_i \phi(\mathbb{P}_i) & \lambda_i^2 \phi(\mathbb{P}_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i & \lambda_i \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i \\ \lambda_i \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i & \lambda_i^2 \mathbb{S}_i^T \mathbb{S}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{S}_i X \\ \mathbb{S}_i Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & \lambda_i I \\ \lambda_i I & \lambda_i^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{S}_i X \\ \mathbb{S}_i Y \end{pmatrix},$$

et sommer pour obtenir l'expression souhaitée.

ii) Or d'après la partie 1- de ce problème, la matrice $\begin{pmatrix} I & \lambda_i I \\ \lambda_i I & \lambda_i^2 I \end{pmatrix}$ est semi-définie positive, si et seulement si la matrice $D = \lambda_i^2 I - \lambda_i I^T I^{-1} \lambda_i I$ (son complément de Schur) est semi-définie positive. Or cette dernière matrice est évidement nulle, semi-définie positive donc. Ainsi, chaque terme de la somme est positif ou nul,

Si $L = \begin{pmatrix} I & \phi(A) \\ \phi(A) & \phi(A^2) \end{pmatrix}$ pour chaque couple $(X, Y)$ de vecteurs, $0 \leq (X^T, Y^T) L (X^T, Y^T)^T$, La matrice $L$ est semi-définie positive comme il fallait démontrer.

iii) L'on peut conclure que des telles applications $\phi$ vérifient que $\begin{pmatrix} I & \phi(A) \\ \phi(A) & \phi(A^2) \end{pmatrix}$ est toujours une matrice semi-définie positive, si $A$ est définie positive. Son complément de Schur $D = \phi(A^2) - \phi(A)^T \phi(A) = \phi(A^2) - (\phi(A))^2$, est une matrice semi-définie positive, d'après 1-vi). En général, $\phi(A^2) - (\phi(A))^2$ n'est pas définie positive, comme l'exemple de $A$ scalaire le montre. Un exemple d'application $\phi$ est le choix d'une sous-matrice principale, $A \mapsto A_p$, $1 \leq p \leq n$. Démontrer directement que $(A^2)_p - (A_p)^2$ est semi-définie positive n'est pas aisé.