Quelques remarques pour ce cours

L'analyse matricielle moderne ne se comprend que dans le cadre de l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle de Banach et l'algorithmique. Si résoudre des équations linéaires et donner des expressions approchées des quantités cherchées, à l'aide d'algorithmes itératifs, sont des activités qui se perdent dans l'histoire humaine, peut-être bien dans la préhistoire, signalons quelques points de repère historiques pour la théorie *moderne.*

L'algèbre linéaire. Les babyloniens résolvent courrament des systèmes 2×2 il y a 4000 ans.

Dans *Neuf Chapitres de l'Art Mathématique (c. -200)* les chinois résolvent des systèmes 3×3 numériques par des méthodes d'élimination, non sans nous rappeler ceux que Gauss introduira en 1811.

La théorie moderne des systèmes linéaires commence avec l'introduction par Leibniz, en 1693, des déterminants. La notion est utilisée par Cramer en 1750 pour donner, sans preuve, ce que nous appelons le Théorème de Rouché-Fontainé, et que les anglo-saxons appellent règle de Cramer. Ceci juste après que McLaurin ait traité les cas 2×2 et 3×3 par le déterminant. Mais c'est Gauss qui en 1801 utilise le premier le terme de "déterminant". C'est Laplace qui en 1772 donne son calcul développant suivant une colonne. La même année VanderMonde publie un traité où le déterminant d'un tableau de nombres est étudié sans relation au système linéaire dont il est issu.

L'élimination de Gauss, est introduite pour traiter par la méthode des moindres carrés, la détermination de l'orbite d'un astéroïde, par Gauss lui même en 1811. La théorie aboutie et moderne des déterminants dans le cadre des équations linéaires, est établie par Cauchy en 1815, en démontant, par exemple que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Elle est abondament utilisée par Cayley en 1843, il introduit des "tableaux de nombres $m \times n$" en 1850, Sylvester les baptise du nom de *matrices.* Ces études seront appliqués à la théorie algébrique des nombres par Dedekind en 1870. Ce sont Kronecker et Weierstrass qui, dans les années 1860, donnent une théorie axiomatique adaptée. C'est en 1858 que Cayley découvre le théorème de Cayle-Hamilton. La théorie des déterminants des systèmes linéaires est tombée en désaffection au XXème siècle lorsque des méthodes modernes pour étudier les systèmes linéaires sont apparues. La théorie de Cauchy, Jacobi,Weierstrass and Kronecker, contenant en particulier les aspects spectraux et les formes de Jordan (introduites par Weiertrass) se marieront avec les méthodes algébriques de Eisenstein, Hermite and Cayley dans le papier fondamental de Frobenius de 1878.

Les méthodes aujourd'hui suivent le cours de développement de l'algèbre en général. De la théorie des groupes de Weber et Cauchy, la théorie des corps de Galois, Dedekind et Steinitz, on ne retiendra que la définition abstraite, par Peano en 1888, des espaces vectoriels puis des applications linéaires etc. Elle a été négligée jusqu'a l'apparition du traité de H. Weyl "Space , Time and Matter" : 1918. Mais ce n'est qu'a partir du traité "Algèbre Moderne" de van der Waerden en 1930 que ce que nous appelons algèbre linéaire trouve son cadre définitif. C'est l'aboutissement des points de vue de Hilbert et d'E. Noether.

Pour ce qui est de l'analyse fonctionnelle, c'est simple : en 1920 S. Banach donne une définiton général d'espace vectoriel normé et développe la théorie. On n'aura quasiment pas à faire appel à des notions ou résultats qui ne lui soient pas dûs.

Les théories qui vous sont présentées : topologie des evn, algèbre linéaire, méthodes de résolution, ont trouvé leur cadre d'exposition définitif au début du XXème siècle. Les méthodes de résolution seront choisis en relation avec la technologie des ordinateurs dont nous disposons. C'est dans les années 40 que leur développement explose. Début des années 60, en France, N. Gastinel y contribue, dans son livre on trouve tout ce qui était essentiel avant 1980.

L'algorithmique apparaît donc fin du XXème siècle, associée à l'informatique. nous ne parlerons pas de sa théorie. Seuls quelques calculs de complexité retiendront notre attention.

Les références pour ce cours abondent. Nous retiendrons pour les étudiants désirant se préparer à l'AGREG les libres de D. Serre [1] et de L. Amodei et J.-P. Dedieu [2]. Pour d'autres points de vue : Ph. Ciarlet [3][4] où [5]. Le classique et indémodable Gantmacher [6] ou celui de N. Gastinel [7]. Il existe plusieurs textes en ligne qui sont très adaptés à notre programme. Par exemple celui du parisien Yves Achdou [9]. N'oublions pas qu'il est exigible d'acquérir un peu d'aisance dans l'utilisation de MATLAB. On pourra consulter à ce sujet [10]. Il est utile d'installer dans son ordinateur personnel une version de SCILAB (à partir de par exemple [11]), libre de droits, et avoir une notice d'utilisation, par exemple [12] (malheureusement trop axé sur le traitement du signal, à mon avis).

Les renseignements sur la L3 Math-Fonda sont dans : `http ://www.math-fonda.ups-tlse.fr/` ceux sur cette UE sont dans `http ://www.math.univ-toulouse.fr/~roche/enseignement/A09_10/troi/indexANM.html`

Références

[1] D. Serre. Les Matrices, théorie et pratique. Dunod, Paris, 2001.
[2] L. Amodei, J.-P. Dedieu. Analyse Numérique Matricielle. Dunod, Paris 2008.
[3] P. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Masson, Paris 1982.
[4] P. Ciarlet et J.-M. Thomas. Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation. Masson, Paris 1982.
[5] P. Lascaux et R. Théodor. Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Masson, Paris, 1987.
[6] F. R. Gantmacher. Théorie des matrices I et II. Dunod, Paris, 1966.
[7] N. Gastinel. Analyse numérique linéaire. Hermann, Paris, 1970.
[8] M. Cuer.`http ://montellier??`. Montpellier, 2006.
[9] Y. Achdou. `http ://www.ann.jussieu.fr/~achdou/node7.html`. Paris, 2005.
[10] J.Prado. Introduction à MATLAB `http ://www.tsi.enst.fr/~prado/enseignement/polys/matlab.html` Paris, 1998.
[11] Consortium SCILAB.`http ://www.scilab.org/`, INRIA.
[12] B. Pinçon. Une introduction à Scilab. `http ://www.iecn.u-nancy.fr/~pincon/scilab/docA4.pdf` . Nancy, 2005.