UNIVERSITE PAUL SABATIER Juin 2010

Licence de Mathématiques Fondamentales, L3

Examen d'analyse matricielle et modélisation

les seuls documents autorisés sont les deux feuilles prévues. Durée 3 heures

Soit $n \geq 1$, nous notons, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de matrices carrées à éléments dans $\mathbb{K}$ de taille n, $U_n(\mathbb{C})$ celles qui sont unitaires, et enfin, les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont des vecteurs colonne.

I (3 points)

Question de cours : Énoncer et démontrer la décomposition en valeurs singulières (SVD) pour les matrices carrées inversibles.

II (3 points)

Déterminer la décomposition de Choleski de :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 10 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

III - A (4 points)

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, A normale ; notons $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, δ la matrice diagonale ayant ces valeurs propres sur la diagonale principale. Considérons μ une valeur propre de $A + B$.

1- Montrer qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$, de norme euclidienne égale à 1, et une matrice unitaire $U \in U_n(\mathbb{C})$ tels que $(\mu I - \delta)Uv = UBv$.

2- En déduire que $||v||_2 \leq ||(\mu I - \delta)^{-1}||_2 ||B||_2 ||v||_2$, si μ n'est pas valeur propre de A.

3- Dans ce même cas, calculer $||(\mu I - \delta)^{-1}||_2$. Conclure, en toute généralité, qu'il existe une valeur propre λ_i telle que $|\mu - \lambda_i| \leq ||B||_2$.

4- Supposons maintenant que $A + \sigma B$ est normale, pour chaque $\sigma \in \mathbb{R}$, fixons un réel σ_1. Montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|\sigma - \sigma_1| < \eta$, et si α est une valeur propre de $A + \sigma_1 B$, la matrice $A + \sigma B$ a une valeur propre β vérifiant $|\alpha - \beta| < \varepsilon$. (Indication, considérer $A + \sigma_1 B$ comme une (petite) perturbation de la matrice normale $A + \sigma B$, en écrivant $A + \sigma_1 B = (A + \sigma B) + (\sigma_1 - \sigma)B$.)

Ce résultat de continuité, ici précisé quantitativement dans le cas des matrices normales, est valable en général, sans l'estimation du module de continuité des valeurs propres (Cours).

III - B (6 points)

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, D sa diagonale principale. Notons $M(t) = tD + (1-t)A$ pour $t \in [0, 1]$. Posons pour $i = 1, 2, \ldots, n$

$$D_i(t) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - a_{ii}| \leq (1-t) \sum_{j=1,\ j \neq i}^{n} |a_{ij}|\}$$

et $W_i(t)$ le fermé de $\mathbb{C}$, réunion de tous ces disques sauf le i-ème : $W_i(t) = \cup_{j=1,\ j\neq i}^{n} D_j(t)$.

1- Montrer que les valeurs propres de $M(t)$ sont dans $D_1(t) \cup W_1(t)$.

T.S.V.P.

2- Déterminer les valeurs propres de $M(1)$.

3- Montrer pour tout $t \in [0,1]$, et tout i, $\quad D_i(t) \subset D_i(0)$.

4- Supposons que $D_1(0)$ ne contient aucune valeur propre de $M(t_1)$ (pour $t_1 \in [0,1]$). Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $t \in [0,1], |t - t_1| < \eta$, alors $D_1(0)$ ne contient aucune valeur propre de $M(t)$. (On pourra écrire $M(t) = M(t_1) + (t - t_1)(D - A)$ et utiliser la continuité des valeurs propres décrite en III-A-4).

5- Montrer que l'ensemble des $t_1 \in [0,1]$ tels que $D_1(0)$ contient au moins une valeur propre de $M(t_1)$ est un ouvert de $[0,1]$, **si l'on suppose** que

$$D_1(0) \cap W_1(0) = \emptyset.$$

6- Conclure (par un argument de connexité) que si l'un des disques de Gerschgorin-Hadamard de la matrice A ne rencontre aucun des autres disques, il contient au moins une des valeurs propres de A.

7- Déduire que si la matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ a n disques de Gerschgorin-Hadamard deux-à-deux disjoints, elle est diagonalisable. Montrer que la réciproque est fausse, par un exemple.

IV (5 points)

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$ un ensemble fini de matrices carrées de taille n à coefficients réels.

Soit donnée une suite infinie $(M_k)_k$ de ces matrices. (C'est-à-dire, $M_k \in \mathcal{A}$, ou aussi : si $k \in \mathbb{N}$, il existe $1 \leq i \leq l$ tel que $M_k = A_i$.)

Notons Q_k le produit : $Q_k = M_k M_{k-1} \cdot \cdots \cdot M_1 M_0$ et $R_k = \frac{1}{||Q_k||_2} Q_k \in M_n(\mathbb{R})$.

L'on fait **l'hypothèse** : $(R_k)_k$ est convergente ; $R_k \to R$, $(k \to +\infty)$, avec $R \in M_n(\mathbb{R})$.

1- Montrer que $||R||_2 = 1$. Puis que pour tout k, $0 \leq \lambda_k(M) \leq ||M||_2$ où nous notons $\lambda_k(M) = ||MR_{k-1}||_2$, pour chaque $M \in M_n(\mathbb{R})$.

2- Montrer que $M_k R_{k-1} = \lambda_k(M_k) R_k$. Pour la suite on notera $\lambda_k := \lambda_k(M_k)$.

3- Montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tel que $M_k = A_i$ pour un nombre infini d'indices k. En déduire que $A_i R = \lambda R$ pour λ l'une des valeurs d'adhérence de la suite $(\lambda_k)_k$.

4- Conclure que les colonnes non nulles de R sont des vecteurs propres d'au moins l'une des matrices de $\mathcal{A}$.

5- Pour $l = 1, n = 2, \mathcal{A} = \{A_1\}$ où $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la suite de matrices $(Q_k)_k$ ne converge pas, que la suite $(R_k)_k$ converge. Calculer sa limite R et déterminer la valeur propre λ.

6- Lorsque dans l'ensemble $\mathcal{A}$, aucune des matrices A_i n'a de valeur propre qui soit réelle, existe-t-il de choix $\mathbb{N} \to \{1, 2, \ldots, l\} : k \to i_k$ de sorte que le produit infini

$$\prod_{k=0}^{+\infty} A_{i_k}$$

soit convergent, sans être de limite nulle ?