

**Examen d'analyse matricielle et modélisation (1L5MFDME2)**

Les seuls documents autorisés sont les deux feuilles prévues. Durée 3 heures

Soit  $n \geq 1$ , nous notons, pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $M_n(\mathbb{K})$  l'ensemble de matrices carrées à éléments dans  $\mathbb{K}$  de taille  $n$ ,  $O_n(\mathbb{R})$  celles qui sont orthogonales, et enfin, les vecteurs de  $\mathbb{K}^n$  sont des vecteurs colonne.

**I (3 points)**

**Question de cours :** Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ , dans la méthode QR nous proposons la suite définie par récurrence :  $A_1 = A$  et si  $A_i = Q_i R_i$  (avec  $Q_i$  unitaire et  $R_i$  triangulaire supérieure de diagonale positive), on pose  $A_{i+1} = R_i Q_i$ . Montrer que si  $A$  est de Hessenberg, toutes les matrices  $A_i$  sont de Hessenberg et ont même spectre.

**II (3 points)**

Résoudre par la méthode de Choleski le système linéaire :

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 3x + 34y - 8z = 16 \\ -x - 8y + 2z = -4 \end{cases}$$

C'est-à-dire, calculer d'abord la décomposition de Choleski de la matrice associée au système, puis le résoudre.

**III (3 points)**

Soit  $X_1 = (3, 4)^T$ .

- 1) Expliciter une matrice orthogonale  $H$ , telle que  $HX_1 = (s, 0)^T$  pour un  $s \in \mathbb{R}$ .
- 2) Déterminer une matrice  $O$  orthogonale telle que

$$M = O \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} O^T$$

soit de Hessenberg. Calculer la norme de Frobenius de  $M$ .

**IV (8 points)**

Dans ce problème,  $A$  est une matrice réelle symétrique définie positive de taille  $n$ .

1- Soient  $B, C \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $C$  symétrique.

Notons  $D = C - B^T A^{-1} B$ , puis  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ .

i) Montrer que  $D$  et  $M$  sont symétriques.

ii) Soient  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  arbitraires. Calculer l'expression de  $(X^T, Y^T) M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ .

iii) Montrer que pour tout  $Z \in \mathbb{R}^n$ ,  $Z^T D Z + (A^{-1} B Z)^T A (A^{-1} B Z) = Z^T C Z$ .

T.S.V.P.

- iv) Montrer, en utilisant le vecteur  $\begin{pmatrix} -A^{-1}BZ \\ Z \end{pmatrix}$  que si  $M$  est semi-définie positive, la matrice  $D$  est aussi semi-définie positive.
- v) (H.B.) Si l'on note  $A^{\frac{1}{2}}$  la racine carrée positive de  $A$  et  $A^{-\frac{1}{2}}$  son inverse, montrer que pour  $X, Y \in \mathbb{R}^n$  arbitraires,  $\|A^{\frac{1}{2}}X + A^{-\frac{1}{2}}BY\|^2 + Y^T D Y = (X^T, Y^T) M (X^T, Y^T)^T$ .  
En déduire que si  $D$  est supposée semi-définie positive,  $(X^T, Y^T) M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \geq 0$ .
- vi) En déduire que  $M$  est semi-définie positive si et seulement si  $D$  l'est.

2- Soit  $\mathbb{E}_{ii}$  la matrice élémentaire  $n \times n$  (dont le seul élément non nul est un 1 en place  $(i, i)$ )

i) Montrer qu'il existe une matrice  $U \in O_n(\mathbb{R})$  et des réels  $\lambda_i > 0$  tels que

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i (U \mathbb{E}_{ii} U^T). \text{ Nous noterons } \mathbb{P}_i = U \mathbb{E}_{ii} U^T.$$

ii) Montrer :  $\mathbb{P}_i^2 = \mathbb{P}_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \mathbb{P}_i = I_n$  (l'identité), et que  $\mathbb{P}_i$  est symétrique semi-définie positive.

iii) Montrer que  $A^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \mathbb{P}_i$ .

3- Soit maintenant  $\phi : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_m(\mathbb{R})$ , ( $m > 0$ ) une application linéaire vérifiant les deux axiomes suivants : •  $\phi(I_n) = I_m$  et

•• pour chaque matrice  $P$  symétrique semi-définie positive,  $\phi(P)$  est aussi symétrique semi-définie positive.

i) Notons  $\mathbb{S}_i$  la racine carrée semi-définie positive de  $\phi(\mathbb{P}_i)$  pour les projecteurs  $\mathbb{P}_i$  définis en 2- ci-dessus, montrer pour  $X, Y \in \mathbb{R}^m$  arbitraires

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & \phi(A) \\ \phi(A) & \phi(A^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} \mathbb{S}_i X \\ \mathbb{S}_i Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & \lambda_i I \\ \lambda_i I & \lambda_i^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{S}_i X \\ \mathbb{S}_i Y \end{pmatrix}.$$

ii) En déduire que  $\begin{pmatrix} I & \phi(A) \\ \phi(A) & \phi(A^2) \end{pmatrix}$  est symétrique semi-définie positive. (Indic. la matrice nulle est symétrique semi-définie positive!)

iii) Conclure que des telles applications  $\phi$  vérifient que  $\phi(A^2) - (\phi(A))^2$  est semi-définie positive.

(Vous rédigez, en feuille séparée, un test sur l'utilisation du logiciel de calcul, sur 3 points).

**Vous réservez 30 minutes pour ce faire.**

Feuillet à rendre séparément, ne rendez pas d'intercalaire, ou autre support : vous gérez votre page-et-démi !

UNIVERSITE PAUL SABATIER

Décembre 2009

Licence de Mathématiques Fondamentales, L3

**Examen d'analyse matricielle et modélisation (1L5MFDME2) : "MatLab"**

**( Pour ce qui n'ont pas fait du TP de Matlab uniquement ! )**

Aucun document n'est admis, pour cette partie.

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  complexe et inversible.

- (1) Justifier brièvement le fait que  $A^H A$  est une matrice définie positive ( $A^H$  est l'adjointe de  $A$ ).

Soit  $A^H A = L^H L$  la décomposition de Cholesky.

- (2) Montrer que l'on peut écrire  $A = QR$  avec  $Q$  unitaire et  $R$  triangulaire supérieure à diagonale positive ( $R_{ii} > 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ ).

- (3) Écrire une fonction **mon\_chol** en matlab pour la décomposition de Cholesky d'une matrice  $B$  générale.

- (4) Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , écrire une fonction **mon\_QR** en matlab pour la décomposition de  $A = QR$  par la méthode proposée ci-dessus.

Rédigez aussi au verso