Université Paul-Sabatier – L1 – Analyse
Feuille de TD 2010-1 : **Équations différentielles**

Exercice 1

Trouver les solutions (réelles) des équations différentielles homogènes suivantes :
1. $y' + 2xy = 0$.
2. $(1 + x^2)y' - xy = 0$.

Exercice 2

Trouver les solutions (réelles) des équations différentielles suivantes (utiliser la méthode de variation de la constante si nécessaire).
1. $y' + 2xy = x$. Quelle solution satisfera $y(0) = 1$?
2. $y' = 2x(x^2 + y)$.
3. $y' + 2y = 0$. Quelle solution satisfera $y(0) - y'(0) = 0$?
4. $y' + y \tan x = \sin x \cos x$. Quelle solution satisfera $y(\pi/4) = 0$?

Exercice 3

Trouver, pour chacune des équations différentielles suivantes, la dimension de l'espace des solutions définies sur $\mathbb{R}$:
1. $xy' - y = 0$;
2. $xy' - 2y = 0$;
3. $xy' + y = 0$.

Donner dans chaque cas une base de l'espace des solutions.

Exercice 4

Résoudre, en raccordant les solutions sur les différents intervalles où le coefficient de y' ne s'annulle pas.
1. $xy' - 2y = x^4$.
2. $x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$ (NB - on aura besoin d'une décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{1}{x(x^2-1)}$).

Exercice 5

Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x)f(y)$. Méthode possible : prendre des dérivées, puis choisir $y = 0$.

Exercice 6 Afin de résoudre l'équation de Bernouilli suivante

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

on effectue le changement de variable $z(x) = 1/y(x)$ qui n'est bien sûr défini que lorsque $y(x) \neq 0$. 1. Quelle nouvelle équation (en z) obtient-on ? 2. En donner toutes les solutions. 3. Quelles solutions obtient-on pour l'équation en y ? 4. Peut-on construire des solutions en y qui échapent ce procédé ?

Exercice 7 Afin de résoudre l'équation suivante

$$x^2 y' + y^2 - 2xy = 0$$

on effectue le changement de variable $y(x) = xt(x)$. 1. Quelle nouvelle équation (en t) obtient-on ? 2. En donner toutes les solutions (utiliser la méthode de l'exercice précédent). 3. Quelles solutions obtient-on pour l'équation en y ? 4. Peut-on construire d'autres solutions en y ? 5. Au cours du calcul on précisera les hypothèses nécessaires à leur validité.